

4.3 Stabilität stationärer Strömungen

Nicht jede Lösung der NSG für die Bewegung eines zähen Fluids ist in der Natur realisierbar, denn sie muss auch stabil sein, d.h. kleine Störungen müssen mit der Zeit abklingen.

Mathematische Stabilitätsuntersuchung: (L. Landau)

Sei $\vec{u}_0(\vec{r})$ die stationäre Lösung
 $\vec{u}_1(\vec{r}, t)$ eine kleine, nicht stationäre Störung

$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1} \text{ mit } p = p_0 + p_1 \text{ erfüllen NSG, KG:}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}$$
$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

⇒ Für den stationären Anteil mit $\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} = 0$:

$$(\vec{u}_0 \cdot \nabla) \vec{u}_0 = - \frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}_0$$
$$\nabla \cdot \vec{u}_0 = 0$$

und für den gestörten Anteil (Terme höherer Ordnung in \vec{u}_1 werden wg. $|\vec{u}_1| \ll |\vec{u}_0|$ weggelassen)

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + (\vec{u}_0 \cdot \nabla) \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 \cdot \nabla) \vec{u}_0 = - \frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}_1$$

linear in \vec{u}_1 !

$$\nabla \cdot \vec{u}_1 = 0$$

plus die Randbedingung $\vec{v}_1 = 0$ an unbeweglichen festen Wänden

$\Rightarrow \vec{v}_1$ genügt einem System homogenes DGLs mit Koeffizienten, die nur Funktionen des Ortes sind und nicht von der Zeit abhängen.

\Rightarrow Die allgemeine Lösung ist eine Summe spezieller Lösungen, in denen \vec{v}_1 über einen Faktor $\vec{v}_1(t) \propto e^{-i\omega t}$ von der Zeit abhängt. Die Frequenzen ω sind durch die Lösungen mit Randbedingungen bestimmt, sie sind komplex: $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega = \omega_r + i\gamma_r$.

Für positiven Imaginärteil $\gamma_r > 0$ wächst $e^{-i\omega t}$ unbeschränkt mit $t \Rightarrow$

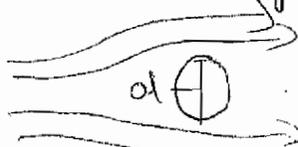
die Störung wird instabil

\Rightarrow Stabile Störung $\Leftrightarrow \gamma_r = \text{Im}(\omega) < 0 \quad \forall \omega$.

Die zugehörige mathematische Stabilitätsuntersuchung ist kompliziert, und bei stationären Störungen um Körper mit endlichen Abmessungen bisher nicht gelöst.

Jedenfalls wird die Störung für $\text{Re} > \text{Re}_{\text{krit}}$ instabil gegenüber infinitesimalen Störungen; für jeden Störungstyp gibt es ein eigenes Re_{krit} , z.B. bei

Störungen um feste Körper: $10 \leq \text{Re}_{\text{krit}} \leq 100$, z.B.

 $\text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}$, $\text{Re}_{\text{krit}} \approx 30$

⇒ \bar{f}_w

$Re < Re_{krit}$ → Störfrequenzen $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ mit $\gamma_1 < 0$:
Stabile Strömung

$Re = Re_{krit}$: $\exists \omega$ mit $\gamma_1 = 0$, $\gamma_1(Re_{krit}) = 0$

$Re > Re_{krit}$ → $\gamma_1 > 0$ (mit $\gamma_1 \ll \omega_1$ bei $Re \approx Re_{krit}$):
Turbulente Strömung

Beim Umströmen eines endlichen Körpers gibt es nur diskrete Frequenzen mit $\gamma_1 > 0$, keine kontinuierlichen

Nichtstationäre Bewegung bei großen $Re > Re_{krit}$ in der Beschreibung von L. Landau 1944.

Ausatz für das Stärfeld \vec{v}_1 :

$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = A(t) \vec{f}(\vec{r})$ mit komplexer Ortsfunktion \vec{f} ,
und komplexer Amplitude $A(t)$:

$$A(t) = \text{const.} \cdot e^{-i\omega t} = \text{const.} \cdot e^{\gamma_1 t} \cdot e^{-i\omega_1 t} \quad \begin{matrix} \text{aufangs-} \\ t \geq 0 \end{matrix}$$

Wie entwickelt sich die Amplitude $|A(t)|$ des Stärfeldes zeitlich?

Für $\text{Re} \approx \text{Re}_{\text{krit}}$ steht die Amplitude des Strahlungsfeldes gegen einen endlichen Grenzwert, der sich wie folgt abschätzen lässt:

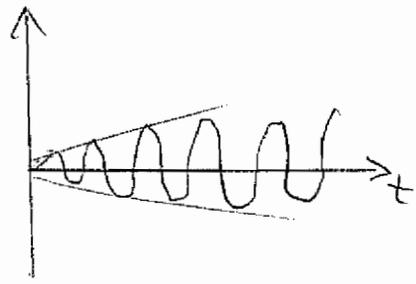
$$\text{Zu kleinen Zeiten ist } |A|^2 = \text{const}^2 e^{2\gamma_1 t} \underbrace{\left| e^{-i\omega t} \cdot e^{+i\omega t} \right|}_{=1}$$

Die zeitliche Änderung des Betragsquadrat der Amplitude wird für kleine Zeiten:

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2$$

Für größere Zeiten gibt es jedoch Abweichungen von der anfänglichen Amplitudenform; in einer Reifenentwicklung kommen weitere Glieder hinzu.

Es interessiert der zeitliche Mittelwert; die Glieder 3. Ordnung enthalten einen periodischen Faktor, der bei Zeitmittelung $\langle |A|^2 \rangle_t$ Null ergibt.



⇒ Bis zu Gliedern 4. Ordnung folgt:

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4$$

α = Landau'sche konstante (pos. oder neg. !)

Lösung:

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const} \cdot e^{-2\gamma_1 t} \quad (\text{Reifen durch Einsetzen})$$

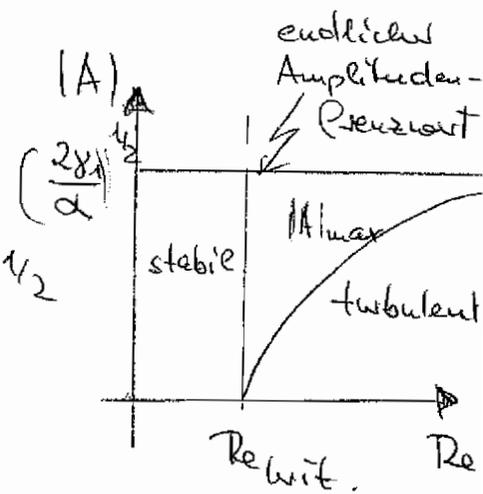
$\Rightarrow |A|^2$ strebt für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen den endlichen Grenzwert

$$|A|_{\max}^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha}$$

γ_1 ist dabei eine Funktion der Reynoldszahl, mit $\gamma_1(\text{Re}_{\text{crit}}) = 0$. Sie lässt sich in der Nähe von Re_{crit} in eine Potenzreihe entwickeln; in erster Näherung ist

$$\gamma_1 = \text{const} (\text{Re} - \text{Re}_{\text{crit}})$$

$$\Rightarrow |A|_{\max} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \text{const}}{\alpha}} (\text{Re} - \text{Re}_{\text{crit}})^{1/2}$$



Bei Berücksichtigung eines weiteren Gliedes in der Entwicklung:

- Die 5. Ordnung fällt bei Zeitmittelung analog zur 3. Ordnung weg:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4 - \beta |A|^6, \quad \begin{matrix} \beta > 0 \\ \alpha < 0 \end{matrix}$$

Lösung (Prüfen durch Einsetzen):

$$|A| = \frac{|\alpha|}{2\beta} + \left[\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta} \gamma_1 \right]^{1/2}$$

Bei $Re = Re_{krit}$ nimmt das System sprunghaft eine endliche Amplitude an, $|A| = |\alpha|/\beta$.

Bei $Re_{krit}^1 < Re < Re_{krit}$ gibt es eine metastabile

Grundströmung, die stabil

gegenüber sehr kleinen Störungen ist ($|A| < \frac{|\alpha|}{2\beta}$)

- sie klingt im Laufe der Zeit ab -

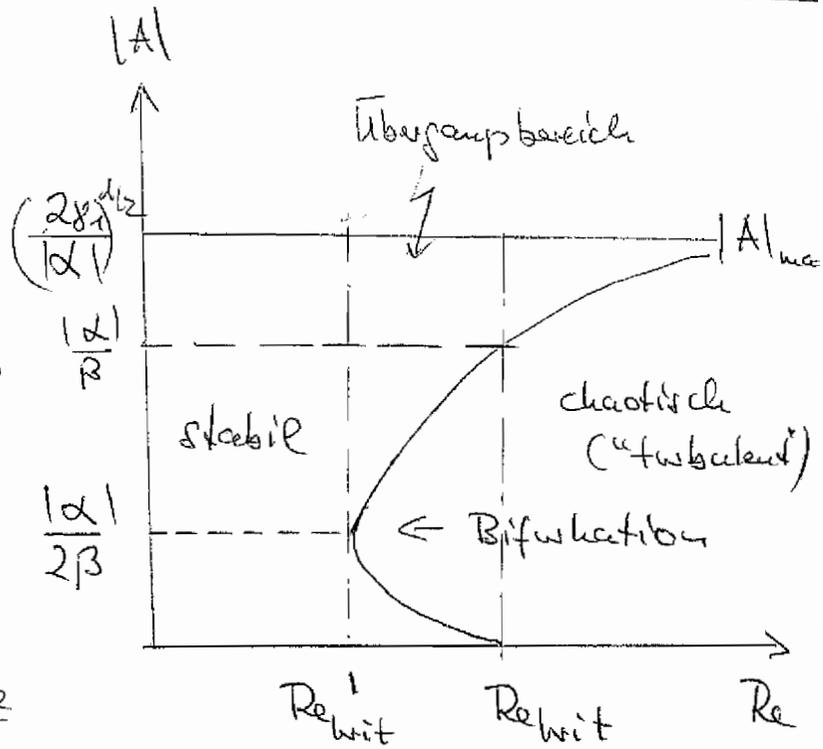
aber instabil gegenüber Störungen mit endlicher

Amplitude $|A| > \frac{\alpha}{2\beta}$.

Für $Re < Re_{krit}^1$ ist die Strömung stabil,

für $Re > Re_{krit}$ gibt es keine stabile Strömung.

Die Phase der Strömung $A(t)$ bleibt unbestimmt, sie hängt von den zufälligen Anfangsbedingungen ab. Dadurch erhält die Strömung einen Freiheitsgrad während eine stationäre (stabile) Strömung durch die äußeren Bedingungen vollständig bestimmt ist.



4.4 Entwickelte Turbulenz in astrophysikalischen Umgebungen

Turbulenz erscheint auf sehr unterschiedlichen Skalen, vom Labor bis in den größten Strukturen im Universum. Voraussetzung ist nur die Gegenwart eines kontinuierlichen, fluid-ähnlichen Mediums.

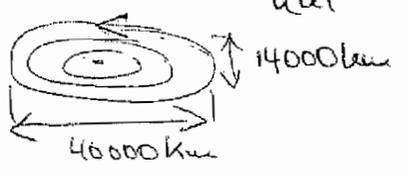
Turbulenz ist eine der wichtigsten (und häufigsten) Naturerscheinungen; dennoch sind wir von einem tiefen Verständnis weit entfernt. Beispiele für entwickelte Turbulenz:

Planeten: Turbulenz essentiell beim Strukturieren der Atmosphäre; zum Wärme- und Impulstransport an der Oberfläche.

terrestrische Planeten: vergleichsweise kleinskalige Strukturen in der Atmosphäre; z.B. Wirbelstürme, ca. 1-10km ϕ (z. B. Katrina)

Große Gasplaneten (Jupiter etc): großskalige Strukturen; z.B. großer Roter Fleck auf Jupiter: Zyklon, 14000km breit, 30-40000km lang, rotiert mit 6 Tagen Umlaufzeit entgegen dem Uhrzeigersinn. 1655 von G. Cassini entdeckt; hat die Jahrhunderte überlebt.

$$T = 6d$$



Saturn: 1990 entstandener "weißer Fleck", Sturmeschein in der $H_2/He/NH_3$ -Atmosphäre ca. 20000km Ausdehnung, 10h 17min Umlaufzeit

Neptun: von Voyager 2 1989 entdeckter blauer Fleck

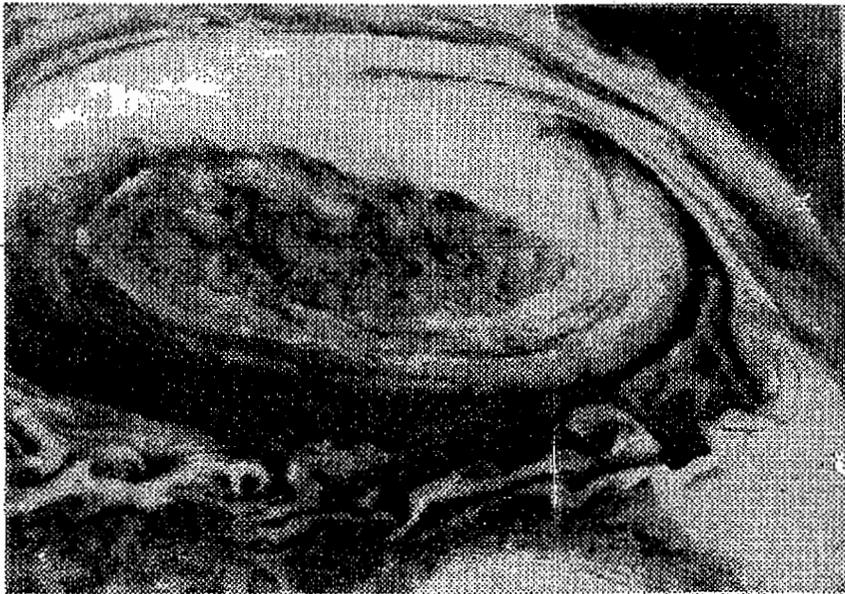
Stromatmosphären: Turbulenz ist Bestandteil jeder Theorie über konvektiven Energieaustausch, mit Implikationen für die interne Struktur von Sternen

Interstellares Medium: Turbulenz in Molekülwolken spielt eine wichtige Rolle bei der Sternentstehung.

Galaxien: Turbulenz spielt eine entscheidende Rolle beim Entstehen von Balken-Quasaren, den größten gravitativ flachen Objekten im Universum

Jupiters Großer Roter Fleck

Zylinder: 14000 km breit
30-40000 km lang
6 Tage Umlaufzeit
(entgegen Uhrzeigersinn)



courtesy NASA

Beispiel für entwickelte Turbulenz

5. Grenzschichten

Bei sehr großen Reynoldszahlen $Re = \frac{\rho l v}{\eta} = \frac{\rho v l}{\eta}$

- entsprechend kleinen Werten von η bzw. v -

kann das Fluid als ideal angesehen werden, i.e.

Dies gilt jedoch nicht in der Nähe fester Wände,

da dort für viskose Fluide $v_{\perp} = v_{\parallel} = 0$ am Rand,

beim idealen Fluid nur die Normalkomponente

$v_{\perp} = 0$ sein muss.

Die Abnahme von \vec{v} auf 0 für große Reynoldszahlen

erfolgt fast vollständig in einer dünnen

Flerschicht an den Wänden, der



Grenzschicht

Grenzschicht. Hier haben die Geschwindigkeits-

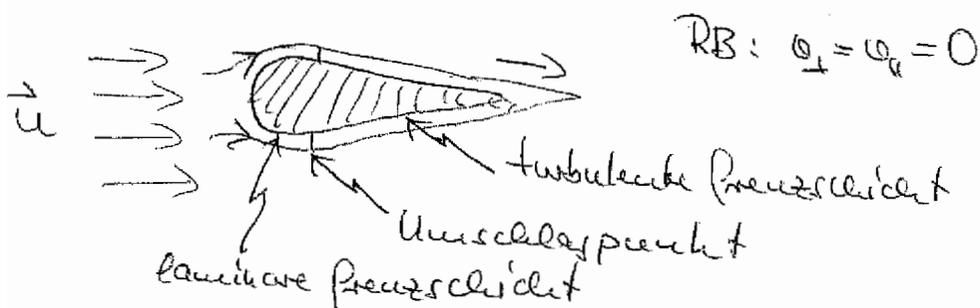
abfallsgradienten hohe Werte; die Strömung kann dort

laminar oder turbulent sein. Die Zähigkeit verursacht

den Geschwindigkeitsabfall in der Grenzschicht bis zu $\vec{v} = 0$

Der Rand der Grenzschicht ist nicht scharf.

Beispiel Strömungskörper:



Dicke der Grenzschicht

laminar:

$$\delta_e = \frac{5l}{\sqrt{Re}} \propto \sqrt{l v}$$

turbulent:

$$\delta_t = 0.37 \sqrt[5]{l v \frac{l^4}{4}}$$

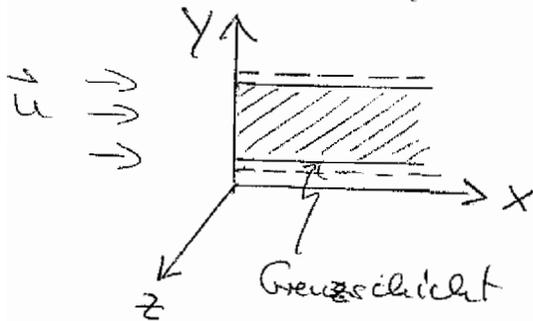
z.B.: $l = 10 \text{ cm}$ (charakt. Länge), $Re = 10^4$:

$$\Rightarrow \delta_e = 0.5 \text{ cm}$$

Formulierung der Theorie durch L. Prandtl 1904

(Int. Mathematisches - Kongress Heidelberg, 1904):

Bewegungsgleichung in der Grenzschicht für eine 2dim.
stationäre Strömung um ein ebenes Teilstück der Ober-
fläche des Körpers aus der Navier-Stokes-Pl.



Außerhalb der Grenzschicht ist die
Strömung eine Potentialströmung
mit der Geschwindigkeit \vec{u} der
Freudströmung

\Rightarrow dort gilt Bernoulli:

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u \frac{du}{dx}$$

Da die Grenzschicht dünn ist, verläuft die Strömung
hauptsächlich parallel zur unströmten Oberfläche,

$$v_y \ll v_x \quad ; \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

\Rightarrow auf die erste Komponente der NSG, und die
Kontinuitätsgleichung konzentrieren, mit

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= u \frac{du}{dx} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \quad (\text{aus KG}) \end{aligned}$$

Prandtl'sche
Gleichungen;

vgl.

RB: $v_x = v_y = 0$ am Rand

S. Pröbmann et
al., Phys. J.
Oct. 2004, p.3

6. Wärmeleitung

Mit Berücksichtigung von Viskosität und Wärmeleitung besteht das Gleichungssystem der Hydrodynamik aus NSG, Kontinuitätsgleichung, und einer 5. thermodynamischen Gleichung. Sie tritt an die Stelle der Adiabaten-Gleichung ($\hat{=}$ Erhaltung der Entropie) bei idealen Fluiden. Wegen der irreversiblen Energie-dissipation ist bei viskosen Fluiden die Entropie nicht erhalten; vielmehr wächst sie an.

Die Änderung der Gesamtenergie in einem bestimmten Volumen pro Sekunde muss gleich dem Energiestrom durch dieses Volumen sein.

Der Energiestrom enthält jetzt außer dem "idealen" Term einen Term infolge der inneren Reibung:

Ideales Fluid:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = - \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] = - \nabla \cdot \vec{f}_{\text{ideal}}$$

ϵ = innere Energie pro
Masseneinheit

$w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$ Enthalpie pro Massen-
einheit.

$\hat{=}$ Energiestrom aufgrund der Verschiebung der Flüssigkeits-
masse; dazu kommt der Energiestrom infolge innerer
Reibung.

$\vec{f}^i = - \vec{v} \sigma^i$	$f_k = \sigma_i \sigma_{ik}$
----------------------------------	------------------------------

Auch bei konstanter Temperatur sorgen die beiden
Energietransportmechanismen für Wärmetransport.

Ist T nicht im ganzen Volumen konstant, gibt es
zusätzliches Wärmetransport durch Wärmeleitung -
direkte molekulare Energieübertragung von Orten mit
höherer, zu Orten mit niedrigerer Temperatur T . Sie geschieht
auch in einer stehenden Flüssigkeit*, läuft also nicht
mit makroskopischer Bewegung zusammen.

* und auch in einem Festkörper

6.1 Die Wärmetransportgleichung

Sei \vec{q} die Wärmestromdichte infolge Wärmeleitung;
 \vec{q} ist eine Funktion der Temperaturänderung. Ist
der Temperaturgradient klein, kann \vec{q} in eine Potenzreihe
nach $\vec{\nabla}T$ entwickelt werden, was aber wiederum die
gleich niedrigster Ordnung berücksichtigen.

Der konstante Term verschwindet, da $\vec{q} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}T = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{q} \approx -\kappa \vec{\nabla}T} \quad \text{mit } \kappa = \text{Wärmeleitfähigkeit}$$

$\kappa > 0$, da der Energiestrom von
Orten mit hoher zu Orten mit
niedrigerer Temperatur gerichtet ist,
 \vec{q} und $\vec{\nabla}T$ haben entgegengesetzte

Richtungen.

⇒ gesamte Energiestromdichte:

$$\vec{j}_{\text{Eisc}} = \underbrace{\rho \vec{v} \left[\frac{v^2}{2} + w \right]}_{\vec{j}_{\text{ideal}}} - \underbrace{\vec{\sigma}' - \kappa \vec{\nabla} T}_{\vec{q}}$$

und es gilt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{Eisc}} \quad (*)$$

das sich mit Hilfe der hydrodynamischen Gleichungen umformen lässt,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] = \underbrace{\frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{aus Kont. Gl.}} + \underbrace{\rho \vec{v} \frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{aus NSG}} + \underbrace{\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}_{\text{aus Therm.}} + \underbrace{\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{aus LB}}$$

Beziehungen, $d\varepsilon = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Nach Einsetzen folgt durch Vergleich mit der rechten Seite des Energieerhaltungssatzes die allgemeine Gleichung für den Wärmestrom,

$$\rho T \left[\underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{\text{lokal}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} s}_{\text{konvektiv}} \right] = \underbrace{\sigma'_{ik}}_{\text{viskos}} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \underbrace{\vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} T)}_{\text{Wärmeleitung}}$$

Ohne Viskosität und Wärmestrom verschwindet die rechte Seite, es ergibt sich dann die Energieerhaltung in einer idealen Flüssigkeit: die

Achaba-Gleichung $\frac{ds}{dt} = 0$.

(Es ist $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right]$)

Die Gesamt-Entropie der Flüssigkeit

$$\int p \cdot s \, dV$$

wächst, da die irreversiblen Prozesse Wärmeleitung und innere Reibung ablaufen.

6.2 Wärmetransport bei inkompressiblen Fluiden

Oft lässt sich die Wärmeleitungsgleichung stark vereinfachen. Falls gilt

Strömungsgeschwindigkeit \ll Schallgeschwindigkeit.

sind die Druckänderungen so klein, dass die zugehörigen Dichteänderungen vernachlässigbar sind.

Die Dichteänderungen infolge Temperaturänderung ΔT müssen jedoch berücksichtigt werden

\Rightarrow bei der Differentiation der thermodyn. Größen den Druck als konstant annehmen, nicht jedoch die Dichte:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \underbrace{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p}_{= C_p/T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \vec{\nabla} T$$

= C_p/T , mit der spez. Wärmekapazität bei konstantem Druck, $C_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$

$$\Rightarrow \boxed{T \frac{\partial s}{\partial t} = C_p \frac{\partial T}{\partial t}} \quad ; \quad \boxed{T \vec{\nabla} s = C_p \vec{\nabla} T}$$

Einsetzen in die Wärme transportgleichung ergibt

$$\rho \cdot c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right] = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Bei kleinen Temperaturdifferenzen kann auch die Dichte als konstant angesehen, und die Flüssigkeit insgesamt als inkompressibel behandelt werden.

Dann ist die Kontinuitätsgleichung

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, und bei kleinen ΔT können wir auch die Temperaturabhängigkeit von η , k und c_p vernachlässigen. Nach Division durch $(\rho \cdot c_p)$ folgt die Wärme transportgleichung in einem inkompressiblen Fluid:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \lambda \Delta T + \frac{v}{2c_p} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]^2$$

mit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ kinemat. Zähigkeit

$\lambda = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$ Temperaturleitfähigkeit.

In einer ruhenden Flüssigkeit wird der Energie transport allein durch Wärmeleitung bewirkt; ohne geschwindigkeitsabhängige Terme wird die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$$

"Wärmeleitungsgleichung",
"Fouriersche Gleichung"

Diese Gleichung folgt auch direkt aus der Energieerhaltung; die in einem bestimmten Volumen pro Zeiteinheit abstrahierte Wärmemenge muss gleich dem Wärmestrom sein, der durch die Oberfläche in das Volumen fließt:

$$\rho \cdot c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \kappa \Delta T \Rightarrow \text{Wärmeleitungspl.}$$

abs. Wärmemenge = Wärmestrom

Die Wärmeleitungsgleichung ist nur sehr begrenzt anwendbar: Bei Flüssigkeiten im Schwerfeld bewirkt bereits ein kleiner Temperaturgradient eine merkliche Strömung ("freie Konvektion"): nur wenn $\vec{\nabla} T$ der Schwerkraft entgegengerichtet ist, oder die Flüssigkeit sehr zäh ist, gilt die Gleichung.

Sie ist dennoch wichtig, da sie auch Wärmeleitung in festen Körpern beschreibt, und soll deshalb hier untersucht werden.

Ist die Temperaturverteilung in einem ungleichmäßig erwärmten, ruhenden Medium zeitlich konstant, wird die Wärmeleitungsgleichung - bei konstanter Wärmeleitfähigkeit κ - zur Laplace-Gleichung

$$\Delta T = 0$$

Wenn κ nicht als konstant angesehen werden kann, muss man allgemein schreiben:

$$\vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} T) = 0$$

Sind zusätzlich freie Wärmequellen vorhanden, muss zur Wärmeleitungsgleichung ein Zusatzterm addiert werden, z.B. für die Aufheizung durch elektrischen Strom.

Sei Q die Wärmemenge, die von Quellen an die Flüssigkeit pro Volumen- u. Zeiteinheit abgegeben wird,

$$Q = Q(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + Q$$

plus Randbedingungen.

6.3 Wärmeauspart in einem unbegrenzten Medium

Sei die Temperaturverteilung bei $t=0$ vorgegeben:

$$T = T_0(x, y, z); \text{ berechne } T(\vec{r}, t \geq 0)!$$

\Rightarrow Entwickle die gesuchte Funktion in ein
Fourier-Integral:

$$T(\vec{r}, t) = \int T_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$\text{mit } T_{\vec{k}}(t) = \int T(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3r$$

Für jede Fourier-Komponente der Temperatur

$$T_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

folgt die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T =$$

$$\frac{dT_{\vec{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\vec{k}} = 0$$

Daraus folgt die Zeitabhängigkeit der $T_{\vec{k}}$ als

$$T_{\vec{k}} = T_{0\vec{k}} e^{-k^2 \chi \cdot t}, \text{ und mit } T = T_0(\vec{r}) \text{ für } t=0:$$

$$T_{0\vec{k}} = \int T_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d^3x'$$

$$\Rightarrow T(\vec{r}, t) = \int T_0(\vec{r}') e^{-k^2 \chi t} e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} d^3x' \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

Das Integral über d^3k ist darstellbar als

Produkt dreier gleichwertiger Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} \cos \beta \xi \, d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\beta^2/4\alpha}$$

mit $\xi =$ eine der Komponenten des Vektors \vec{k} ; das analoge sin-Integral verschwindet, da sich eine ungerade Funktion ist.

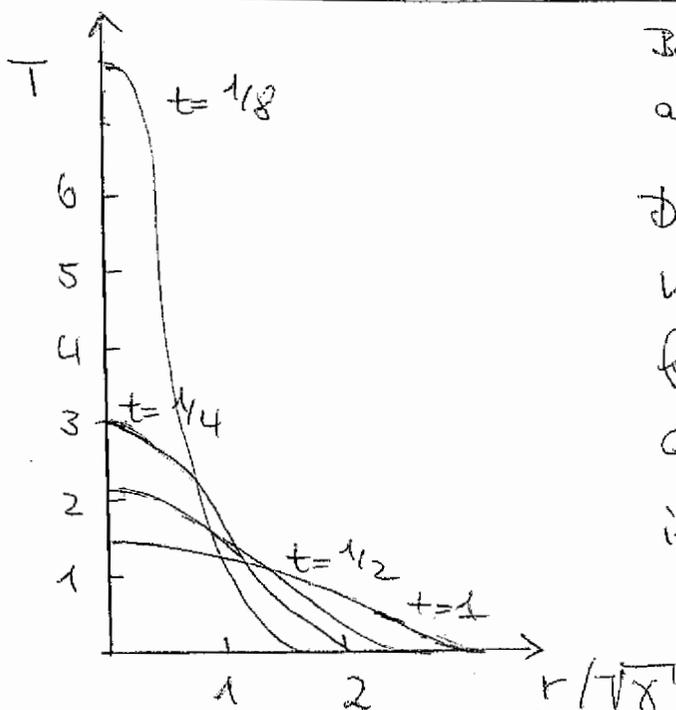
$$\Rightarrow T(\vec{r}, t) = \frac{1}{8(\pi \chi t)^{3/2}} \int T_0(\vec{r}') \exp\left\{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4\chi t}\right\} d^3x'$$

Zeitabhängige Temperaturverteilung, bei gegebenem Anfangswert. T_0 heißt T_0 nur von einer Koordinaten ab (x), lässt sich die $dy' dz'$ Integration ausführen \Rightarrow

$$T(x, t) = \frac{1}{2(\pi \chi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x') \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right\} dx'$$

und für eine anfängliche δ -Funktionsverteilung $T_0(\vec{r}) = \text{const.} \delta(\vec{r})$

$$T(\vec{r}, t) = \text{const.} \cdot \frac{1}{8(\pi \chi t)^{3/2}} e^{-r^2/(4\chi t)} \quad (\sigma^2 = 2\chi t)$$



Bei $r=0$ nimmt die Temperatur $\propto t^{-3/2}$ ab, in der Umgebung nimmt sie zu.

Der Verlauf der Temperaturverteilung wird i.H. durch den Exponentialfaktor bestimmt. Die Standardabweichung der Gaußfunktion

ist $\sigma = \sqrt{2\chi t}$, die Breite

$\Gamma = \sqrt{8\ln 2} \sigma$, d.h.

$l \propto \sqrt{t}$.

Dementsprechend ist die Relaxationszeit für den Wärmeleitungsprozess, in dem sich die Temperaturen merklich angleichen,

$$\tau \propto \frac{l^2}{\kappa}$$

(Ein Präzisionsmaß der Abmessungen des Körpers, das zunächst ungleichmäßig erwärmt ist)

Thermische Störungen breiten sich instantan über den ganzen Raum aus: Bei anfänglicher δ -Funktion geht die Verteilung schon im nächsten Moment weiter in unendlichen asymptotisch gegen 0.

(In räumlich begrenzten Medien kommen die Randbedingungen hinzu).

6.4 Konvektion

Konvektion ist eine Strömung in einer ungleichmäßig erwärmten Flüssigkeit. Sind die Temperaturdifferenzen groß gegen die Temperaturänderungen durch Wärmeentwicklung bei der Energieabstrahlung,

$$\Delta T \gg \Delta T_{\text{abstr.}},$$

kann man den Viskositätskern in der Wärmeauspartgleichung vernachlässigen,

$$\chi \Delta T \gg \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T} \quad \text{für inkompressible Fluide}$$

mit der Temperaturleitfähigkeit

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho \cdot c_p}, \quad \kappa = \text{Wärmeleitfähigkeit.}$$

Zusammen mit der Navier-Stokes-Gleichung wird Konvektion dadurch vollständig beschrieben (ind. Kontinuitätsgleichung).

Stationäre Konvektion

keine zeitliche Änderung der Temperaturverteilung,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{die Zeitableitungen fallen heraus,}$$

$\vec{u} \vec{\nabla} T = \chi \Delta T$	Konvektion (stat.)
$(\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}$	NSG
$\vec{\nabla} \vec{u} = 0$	KG

\vec{u} , T und $\frac{p}{\rho}$ sind die unbekannten Funktionen,

ν und χ Parameter (i.a. konstant).

Die Lösungen hängen über die Randbedingungen

(z.B. fester Körper in der Strömung) von weiteren

Prozessen ab: z.B.

- Längenskala eines festen Körpers in der Strömung
- Geschwindigkeit \vec{u} der Grundströmung
- charakt. Temperaturdifferenz $T_1 - T_0$ zwischen T_0 im und festem Körper.

Die Gleichung für T ist linear und homogen, sie kann deshalb mit einem beliebigen konstanten Faktor multipliziert werden

\Rightarrow die Mess Einheit der Temperatur ist willkürlich wählbar \Rightarrow wähle Kelvin

\Rightarrow 5 Parameter charakterisieren die Konvektion; Einheiten:

$$[v] = [\lambda] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}; \quad [u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad [l] = \text{m}; \quad [T_1 - T_2] = \text{K}$$

Daraus lassen sich zwei unabhängige dimensionslose Kombinationen bilden:

$$Re = \frac{u \cdot l}{\nu} \quad \text{Reynoldszahl, v.o.}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\chi} \quad \text{Prandtl-Zahl} = \frac{\text{kinemat. Viskosität}}{\text{Temperaturleitfähigkeit}}$$

Die Prandtl-Zahl ($\hat{=}$ Wärmeübertragungskennwert) ist eine materialspezifische, aber von T , aber nicht von den Eigenschaften der Strömung abhängig.

Für Gase ist sie von der Prozessordnung 1, für Flüssigkeiten variiert sie stark. Bei 20°C ist Pr in...

	Pr
Quecksilber	0.044
Luft	0.733
Wasser	6.75
Alkohol	16.6
Öl	7250

Das Produkt von Re und Pr ist

$$Pe \equiv Re \cdot Pr = \frac{u \cdot l}{\chi} \equiv \text{Péclet-Zahl.}$$

In die dimensionslose Funktion für die Temperaturverteilung gehen Re und Pr als Parameter ein,

$$\frac{T - T_0}{T - T_1} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, Re, Pr\right).$$

In die Geschwindigkeitsverteilung geht nur Re ein, da sie durch NSG und LG bestimmt ist, in denen χ bzw. Pr nicht vorkommen:

$$\frac{\vec{u}}{u} = \vec{f}\left(\frac{\vec{r}}{l}, Re\right).$$

Der Wärmekontakt zwischen Flüssigkeit und festem Körper charakterisiert die Wärmeübergangszahl α ,

$$\alpha = \frac{q}{T_1 - T_0} \quad ; \quad q = |\vec{q}|, \quad \vec{q} = -\kappa \nabla T$$

Wärmestromdichte durch die Körperoberfläche

$T_1 - T_0$ = Temperaturdifferenz festes Körper / Flüssigkeit.

Der Wärmekontakt kann durch die dimensionslose Nusselt-Zahl charakterisiert werden,

$$Nu \equiv \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = f(Re, Pr)$$

7. Diffusion

7.1 Flüssigkeits-Mischungen

Bisher haben wir ein Fluid als homogen angenommen.
Bei Mischungen, deren Zusammensetzung vom Ort abhängt, werden die hydrodynamischen Gleichungen wesentlich abgeändert.

Mischung aus 2 Komponenten:

Konzentration $C \equiv \frac{m_1}{M}$; $M = m_1 + m_2 =$ Gesamtmasse im Volumenelement, $m_1 =$ 1. Komponente

Die Verteilung der Konzentration ist zeitabhängig:

(1) Jedes Teilvolumen bewegt sich als Parzelle mit unveränderter Zusammensetzung: mechanische Durchmischung

Diese Konzentrationsänderung ist reversibel und bewirkt keine Energiedissipation. (Beispiel: Paraffin in H_2O)

(2) Die Zusammensetzung ändert sich durch molekularen Massentransport aus einem Teilvolumen in ein anderes:

H_2O	Tinte
--------	-------

Der Konzentrationsausgleich geschieht durch Diffusion ist zeitlich irreversibel.

Neben Wärmeleitung und Viskosität ist Diffusion die Ursache der Energiedissipation in einem Flüssigkeitsgemisch.

Ohne Diffusion bleibt die Zusammensetzung eines Fluidelements bei der Bewegung unverändert, es gilt eine Kontinuitätsgleichung für den "Substanzstrom" $\rho \cdot c \cdot \vec{v}$ ($c = \frac{m_2}{m}$):

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot c \cdot \vec{v}) = 0$$

Integration mit Gauß'schem Satz ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c dV = - \oint \rho \cdot c \cdot \vec{v} d\vec{f}$$

(Der Strom für die zweite Substanz ist analog $\rho \cdot (1-c) \cdot \vec{v}$)

Mit Diffusion kommt der sog. Diffusionsstrom hinzu,

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot c \cdot \vec{v}) = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

"6. Grundgleichung der Hydrodynamik", bei Gemischen

bzw. in integraler Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \cdot c \cdot dV = - \oint \rho \cdot c \cdot \vec{v} d\vec{f} - \oint \vec{j} d\vec{f}$$

Mit Hilfe der thermodynamischen Größen - die jetzt jedoch auch von der Konzentration c abhängen - erhalten wir außerdem die verallgemeinerte Wärmeausgangsgleichung (5. Gleichung). Sie folgt aus der Energieerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \cdot \varepsilon \right] = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{Wärme}}$$

durch Umformung mit Hilfe von Navier-Stokes und Kontinuitätsgleichung.

fehlt enthalten die Ausdrücke für Energie und Enthalpie jedoch einen zusätzlichen Term mit dem Differential der Konzentration:

$$(1) dE = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \mu dc \quad \text{Energie}$$

$$(2) dW = T ds + \frac{1}{\rho} dp + \mu dc \quad \text{Enthalpie}$$

[analog ist
 $T \propto$ mittlere Energie
 $\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$]

mit $\mu \equiv$ chem. Potential des Gemisches,

$$\mu = \frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2} ; \mu_{1,2} = \text{chem. Potentiale,} \\ \propto \text{mittlere Teilchenzahl}$$

\Rightarrow in der Ableitung $\rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)$ kommt zusätzlich der Term $\rho \cdot \mu \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)$ vor; analog kommt zu $-\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p$ der

Term $\rho \cdot \mu \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c$ hinzu.

Damit wird die Gleichung für die zeitliche Änderung der Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho E \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{Energie}} + \rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s \right] - \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \vec{\nabla} \vec{q} - \mu \vec{\nabla} c$$

Damit der Energieerhaltungssatz erfüllt ist, muss demnach gelten

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s \right] = \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{q} - \mu \vec{i}) - \dot{c} \vec{\nabla} \mu$$

$$\left[\text{mit } \vec{\nabla} \vec{q} - \mu \vec{\nabla} c = \vec{\nabla} \cdot (\vec{q} - \mu \vec{i}) + \dot{c} \vec{\nabla} \mu \right]$$

Diese Gleichung für die zeitliche Änderung der Entropie unter Berücksichtigung der Diffusion ist eine Umformulierung der Wärmeleitgleichung.

Um die Gleichungen zu lösen, müssen der Diffusionsstrom \vec{i} und der Wärmestrom \vec{q} durch die Temperatur- und Konzentrationsgradienten ausgedrückt werden. Beide Ströme hängen i.a. von beiden Gradienten ab. Sind diese klein, kann man \vec{i} und \vec{q} als lineare Funktionen von $\vec{\nabla} \mu$ und $\vec{\nabla} T$ ansetzen:

$$\vec{i} = -\alpha \vec{\nabla} \mu - \beta \vec{\nabla} T$$

$$\vec{q} = -\delta \vec{\nabla} \mu - \gamma \vec{\nabla} T + \mu \vec{i}$$

Sobald sich Temperatur und Konzentration nur wenig ändern, und es keinen wesentlichen Druckgradienten gibt, lassen sich diese Gleichungen mit Hilfe thermodynamischer Relationen umformen zu:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left[\Delta c + \frac{k_T}{T} \Delta T \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k_T}{c_p} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T} \frac{\partial c}{\partial t} = \chi \Delta T$$

dh. Temperatur und Konzentration sind durch ein lineares Gleichungssystem bestimmt.

mit $D = \frac{\alpha}{\rho} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T} \equiv$ Diffusionskoeffizient

$k_T \cdot D = \frac{d \cdot T}{\rho} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{c,p} + \beta \equiv$ Thermodiffusionskoeffizient.

Bei kleinen Konzentrationen wird $k_T \cdot D \rightarrow 0$, es folgt eine reine Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \Delta c, \text{ plus Randbedingungen.}$$

Die Diffusionsgleichung hat dieselbe Gestalt wie die Wärmeleitungsgleichung für eine ruhende Flüssigkeit,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$$

so dass alle Formeln aus Kap. 6 übertragen werden können mit

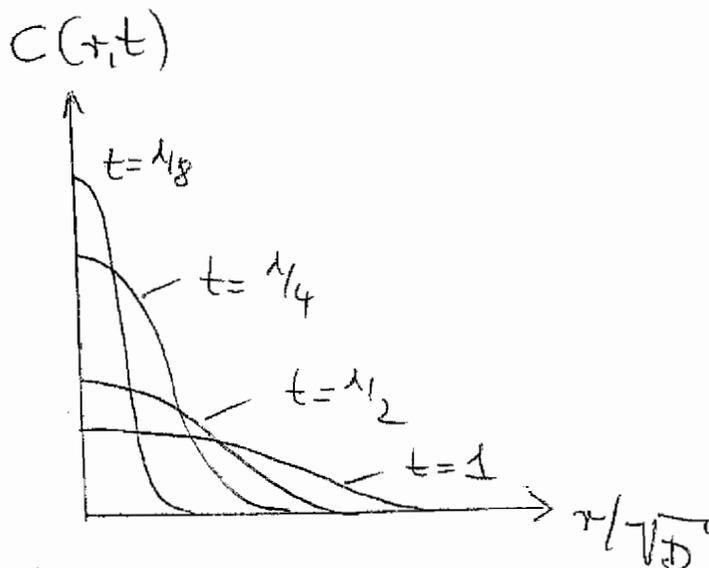
$$\begin{aligned} T &\rightarrow C \\ \chi &\rightarrow D \end{aligned}$$

Beispielsweise ergibt sich für die Verteilung einer gelösten Substanz mit δ -Funktions-Aufangsbedingungen bei $t=0$

$$C(r, t) = \frac{M}{8\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} e^{-r^2/(4Dt)}$$

in Polarkoordinaten, 3-dimensional; M = Gesamtmenge der gelösten Substanz.

Zeitverteilung der Konzentration im Diffusionsvorgang:



7.2 Brownsche Bewegung

Aufgrund molekularer Stöße machen in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen eine ungewohnte "Zitterbewegung", die der Botaniker R. Brown (1773-1858) 1827 entdeckt hatte, und deren Ursache bis zu A. Einsteins Arbeit 1905 unbekannt blieb:
 A.E., Ann. Physik 17 (1905) 549-560.

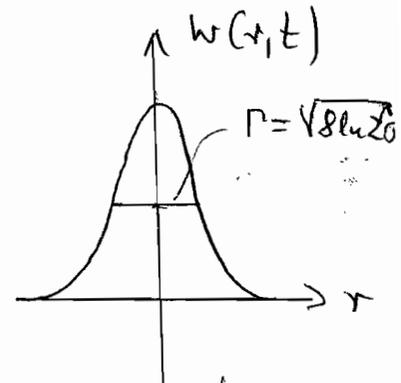


Sei zu $t=0$ ein "Browsches Teilchen" (eg. Blütenpollen in Wasser) im Koordinatenursprung; seine Bewegung wird als Diffusionsprozess beschrieben, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit tritt an die Stelle der Konzentration.

Dann lässt sich die Lösung der Differentialgleichung in 7.1 verwenden,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \Delta w$$

$$\Rightarrow w(r, t) = \frac{M}{\rho_p (\pi D t)^{3/2}} \exp \left[-\frac{r^2}{4 D t} \right]$$



Im 3dim. Fall, radiale Koordinate

Voraussetzung: die Teilchen der gelösten Substanz wechselwirken nicht miteinander, die Teilchenbewegung ist unabhängig von jeweils nächsten anderen Teilchen.

Mit $w(r,t) dr =$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Brownsche Teilchen zur Zeit t in einem Abstand zwischen $(r, r+dr)$.

Setze $\frac{M}{\rho} \equiv 1$, $\cdot 4\pi r^2 dr$ (= Volumen der Kugelschale)

$$\Rightarrow w(r,t) dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left[-\frac{r^2}{4Dt}\right] r^2 dr$$

Das mittlere Quadrat des Abstandes vom Ausgangspunkt des Brownschen Teilchens zur Zeit t ist

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 w(r,t) dr = 6Dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\langle r^2 \rangle} \propto \sqrt{t}}$$

Der Diffusionskoeffizient D lässt sich aus der Beweglichkeit b berechnen:

Es wirke eine konstante äußere Kraft (z.B. die Schwerkraft) \vec{F} auf die Brownschen Teilchen. Im stationären Zustand ist sie gleich dem Widerstand $\frac{\vec{v}}{b}$ ($b = \text{const}$) gegen die

Teilchenbewegung:

$$\boxed{\vec{v} = b \cdot \vec{F}}$$
, $b \equiv$ Beweglichkeit (berechenbar aus den hydrodyn. Gleichungen).

Widerstand bei kugelförmigen Teilchen:

$$\boxed{\vec{F} = 6\pi\eta R\vec{v}}$$
, Stokesche Formel

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{\frac{6}{\pi} \eta R} = \frac{1}{6\pi \eta R}}$$

[Bei nicht-kugelförmigen Teilchen hängt der Widerstand auch von der Bewegungsrichtung ab];

$$\vec{F}_i = a_{ik} v_k, \quad a_{ik} = \text{symmetrischer Tensor};$$

Zur Berechnung von b über alle Orientierungen mittels;

mit den Hauptachsenwerten a_1, a_2, a_3 von $a_{ik} \Rightarrow$

$$b = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right)] .$$

Beziehung zwischen b und D ($D = T \cdot b$, "Einstein-Relation")

der Diffusionsstrom ist

$$\boxed{\vec{j} = - \rho D \vec{\nabla} c + \rho \cdot c \cdot b \cdot \vec{F}}$$

↑
Term aufgrund des
Konzentrationsgradienten

↑
Term aufgrund der äußeren Kraft,
 $\rho \cdot c \cdot \vec{v} = \rho c b \vec{F}$

$$\Rightarrow \vec{j} = - \frac{\rho \cdot D}{(\partial \mu / \partial c)_{T,P}} \vec{\nabla} \mu + \rho c b \vec{F} \quad \text{mit } \mu = \text{chem. Potential} \\ \text{des suspendierten Teilchen}$$

Das chem. Potential hängt von der Konzentration ab,

$$\mu = T \ln c + \gamma(p, T)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = - \frac{\rho \cdot D \cdot c}{T} \vec{\nabla} \mu + \rho \cdot c \cdot b \cdot \vec{F}}$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht gibt es keine Diffusion, $\vec{i} = 0$.

Mit äußeren Feld muss im Gleichgewicht gelten

$\mu + U = \text{const}$; $U \equiv$ potentielle Energie der suspendierten Teilchen im Feld

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \mu = -\vec{\nabla} U = \vec{F}, \text{ und mit } \vec{i} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\rho D c}{T} \vec{F} + \rho \cdot c \cdot b \cdot \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{T} = b, \quad \boxed{D = T \cdot b}$$

"Einstein-Relation"
für die Beziehung zwischen Beweglichkeit und Diffusionskoeffizient: Verknüpfung über die Temperatur.

Einsetzen der Beweglichkeit bei kugelförmigen Teilchen ergibt ($k_B=1$)

$$\boxed{D = \frac{T}{6\pi \eta R}}$$

translatorische Diffusion suspendierter Brownscher Teilchen (es gibt auch eine Brownsche Rotations / Diffusionsbewegung)

(In der Einsteinschen Arbeit wird die Notation verwendet

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi \eta a} \quad \text{mit} \quad R = 8.31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}, \quad N = 6.03 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Gaskonst. , Avogadro'sche Zahl

$$a \hat{=} R \text{ (ober)} ; k = \frac{R}{N} \hat{=} 1 \Rightarrow \text{entspricht dem obigen Resultat.}$$

- Die Boltzmann-Konstante $k = 1.3 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ist die auf ein Molekül bezogene Gaskonstante

7.3 Diffusion in relativistischen Systemen

- Vielkörpersysteme (Atomkerne aus Bayonne) bei relativistischen Energien
- CERN SPS = fixed-target

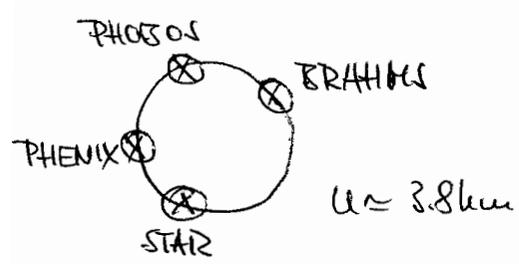
$E_L = 158 \text{ GeV}$ Teilchen $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$

$E_{\text{cm}} = \sqrt{s_{NN}} = [2u^2 + 2E_L u]^{\frac{1}{2}} \approx 17.3 \text{ GeV}$

↑
Nukleonenmasse, 938 MeV



- RHIC collider, Brookhaven



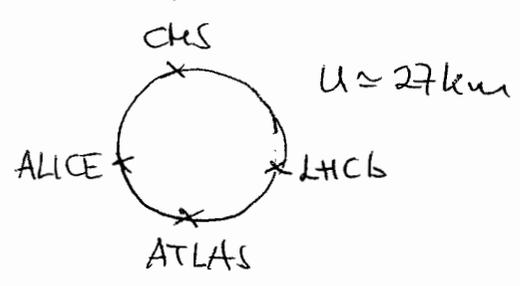
100 GeV Teilchen $^{197}_{79}\text{Au} + ^{197}_{79}\text{Au}$

$\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV} = 0.2 \text{ TeV}$

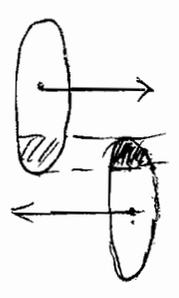
6 intersections,
4 Experimente

- LHC collider, CERN

2.75 TeV Teilchen $^{208}_{82}\text{Pb} + ^{208}_{82}\text{Pb}$



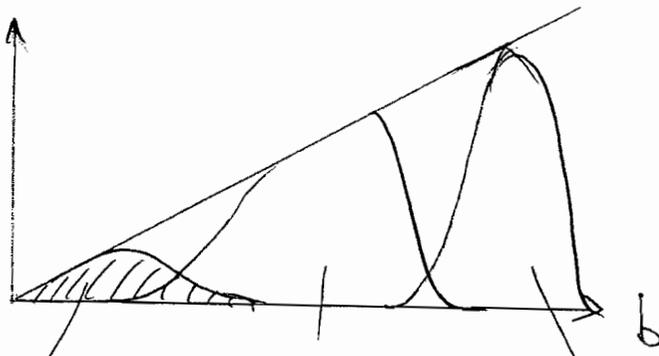
$\sqrt{s_{NN}} = 5.5 \text{ TeV}$



Starke Lorentz-kontrahierte Kollisionssysteme, charakterisiert durch

- Teilchenzahlen $N_1, Z_1; N_2, Z_2$
- cm. Energie \sqrt{s}
- Stoßparameter b
- $d(u) = d_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ Lorentz-kontraktion

$\frac{d\sigma}{db}$



Quark-gluon-Plasma Bildung
eoth. thermische Äquilibrierung
Hadronen-Erzeugung
Fragmentation

1) In zentralen Stößen bei Energiedichten über dem kritischen Wert $\epsilon_{krit} \approx 1.5 \frac{\text{GeV}}{fm^3}$ wird ein kurzlebiger Quark-gluon Plasma gebildet, $\tau_{QGP} \approx 10^{-23}$ s. Es entspricht dem Urzustand der Materie im Universum bis $\approx 10 \mu\text{s}$ nach dem Urknall.

2) Im Verlaufe der Kollision werden aus der verfügbaren relativistischen Energie so viele Teilchen erzeugt, dass eine nichtgleichgewichts-statistische Betrachtungsweise gerechtfertigt ist:

- bei SPS-Energien ~ 2100 geladene Hadronen
- bei RHIC- " ~ 5000 "
- bei LHC- " ~ 12000 "

Es wird dabei die verfügbare relativistische Energie

$$E_{av} = \sqrt{s} - u(A_1 + A_2)$$

in Ruhemasse und kinetische Energie erzeugter Teilchen umgewandelt. In transversaler Richtung (senkrecht zum Strahl) sind die Energieverteilungen nahe am statistischen Gleichgewicht.

In longitudinaler Richtung -parallel zum Stahl- sind die Verteilungsfunktionen entfernt vom thermodynamischen Grenzfall.

Dies gilt v.a. für die Verteilung der Rapidität der Teilchen ($\hat{=}$ Lorentz-invariantes Analogon der Geschwindigkeit)

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + P_{||}}{E - P_{||}} = \tanh^{-1} \left(\frac{P_{||}}{E} \right) \approx - \ln \tanh \left(\frac{\theta}{2} \right) \equiv \eta$$

Als Folge von Stößen und Teilchenzerzeugung genügt die Verteilungsfunktion der Rapidität einer Diffusionsgleichung; in linearer Näherung ist für $R = R(y, t)$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{\tau_y} \frac{\partial}{\partial y} [(y - y_{eq}) R] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [D_y R]$$

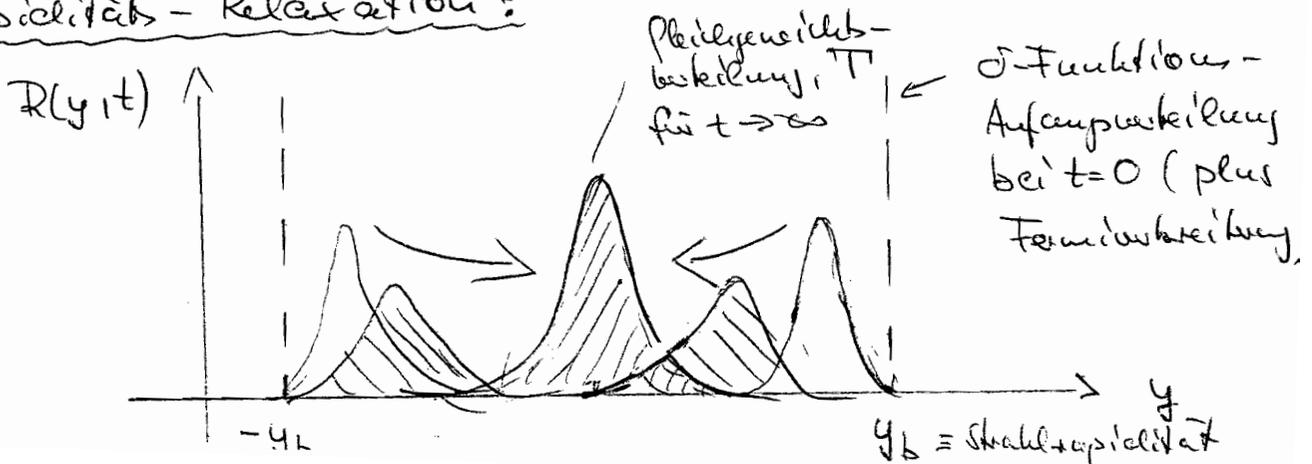
mit y_{eq} = Gleichgewichtswert der Rapidität (= 0 für symm. Systeme)

τ_y = Rapiditäts-Relaxationszeit

D_y = Diffusionskoeffizient, bestimmt die Verbreiterung der Verteilungsfunktion

$D_y \propto T/\tau_y$ Dissipations-Fluktuationstheorem; T = Gleichgewichtstemperatur

Schematisches Bild der Rapiditäts-Relaxation:



Die Relaxationszeit τ_y und der Diffusionskoeffizient D_y sind über ein Dissipations-Fluktuationstheorem und die lokale Gleichgewichtstemperatur T miteinander verknüpft. (Analog zu Brownian Bewegung, siehe 7.2).

Lösung der linearen Diffusionsgleichung:

$$R(y,t) = \left[\sqrt{2\pi\sigma_y(t)} \cdot 2 \right]^{-1} \left\{ \exp \left[-\frac{(y-y_1 e^{-t/\tau_y})^2}{2\sigma_y^2(t)} \right] + \exp \left[-\frac{(y+y_1 e^{-t/\tau_y})^2}{2\sigma_y^2(t)} \right] \right\}$$

für symmetrische Systeme;

Varianz:

$$\sigma_y^2(t) = D_y \tau_y \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_y}\right) \right] = \frac{\Gamma}{2k} \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_y}\right) \right]$$

k = Krümmung eines parabolischen treibenden Potentials im y -Raum.

Für große Zeiten $t > t_2$ mit $\Gamma_{FWHM}(t_2) = \sqrt{8 \ln 2} \sigma_y(t_2) \approx y_1$

wird aus den beiden getrennten Verteilungen eine

einzelige Verteilung, die bei $y = y_{eq}$ zentriert ist und

für $t \rightarrow \infty$ in die Gleichgewichtsverteilung übergeht.

→ siehe u.a. Reviews-Artikel G.W., Prog. Part. Nucl. Phys., 59, 374 (2007) und sonstige Referenzen.

Rapidity Distribution Functions (SPS)

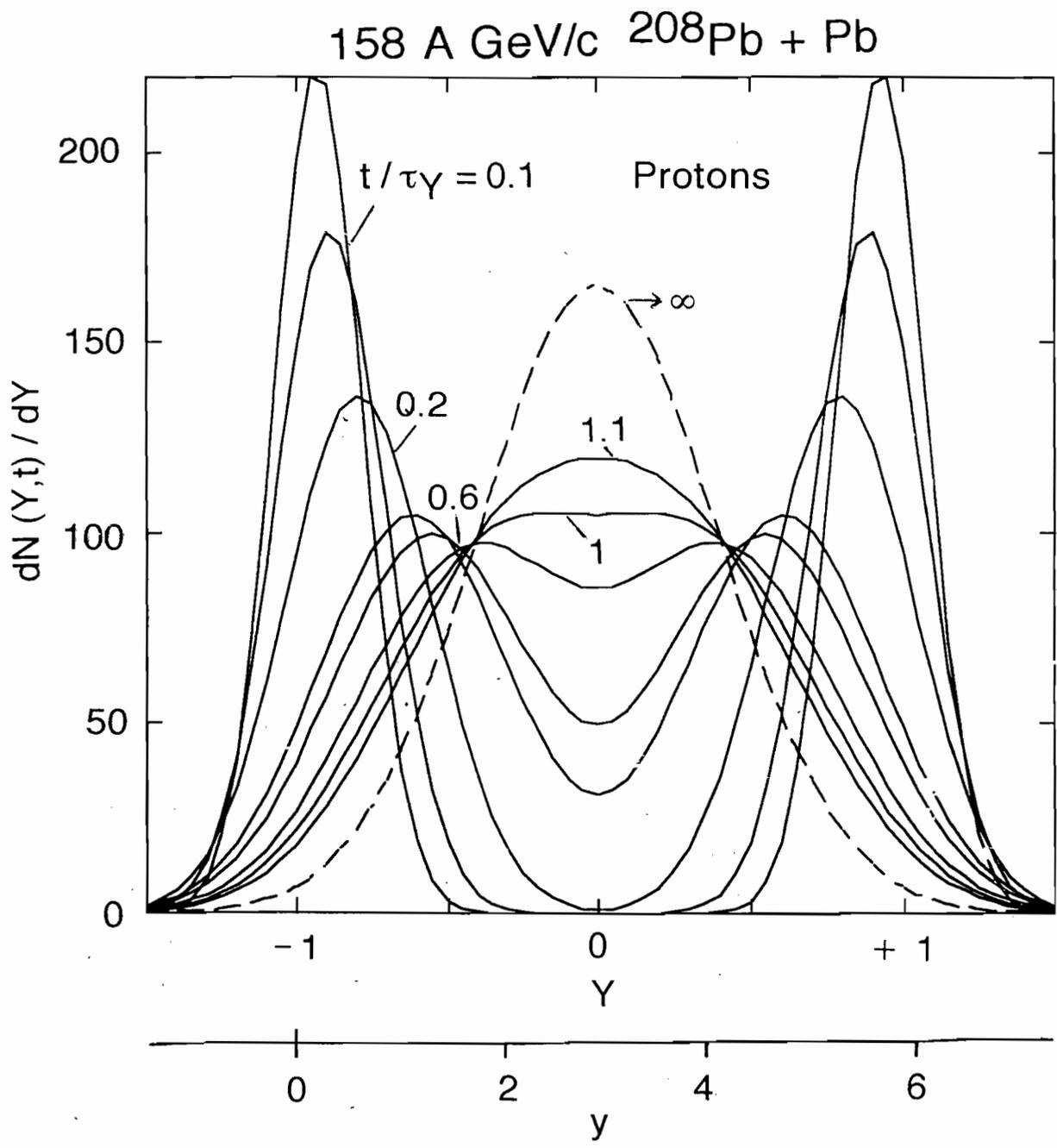


Fig.2.

Rapidity Relaxation @ SPS-Energies

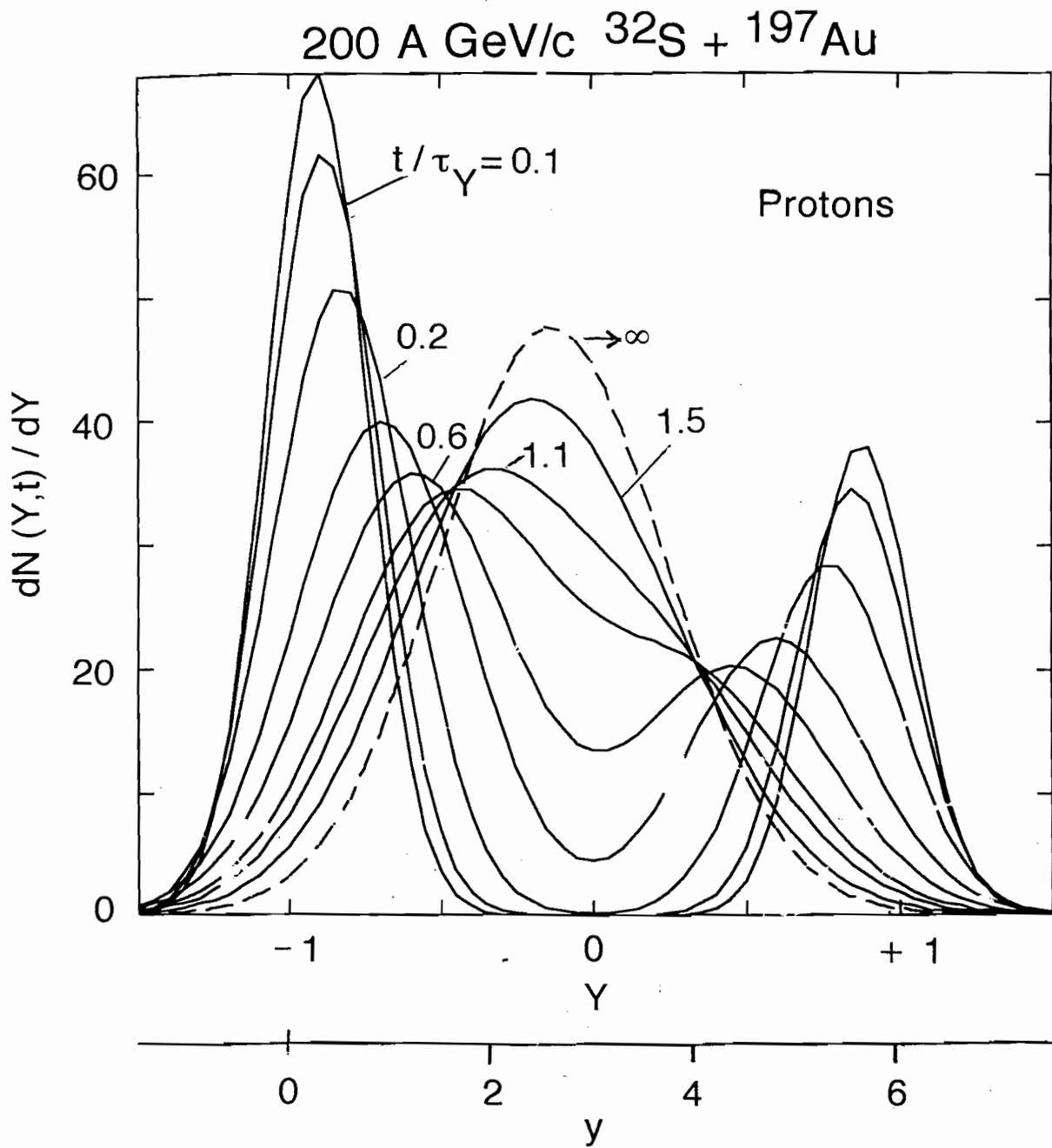
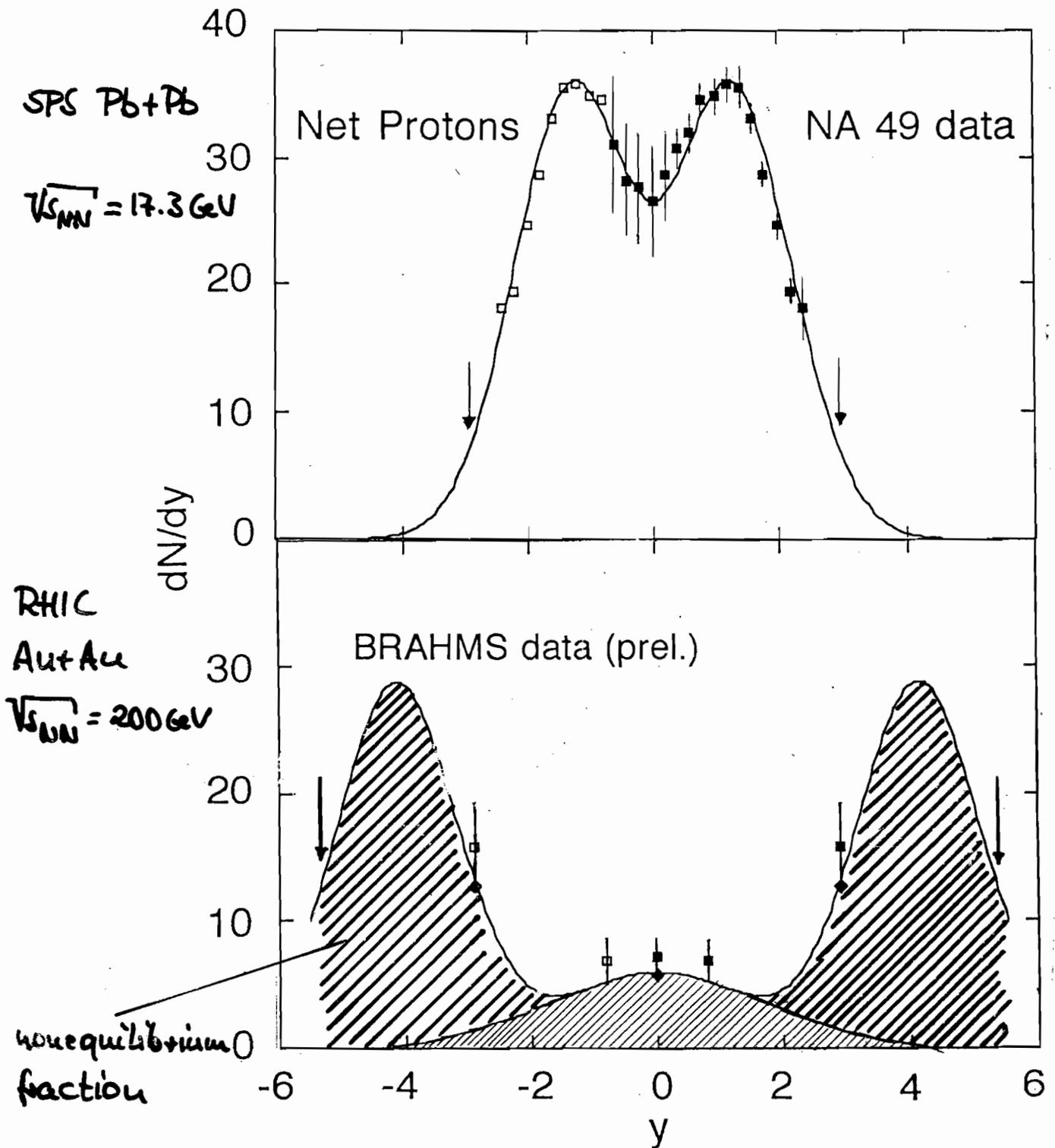


Fig.1.

G.W., Eur. Phys. J. A4 (1999) 85

Net-proton rapidity distributions

SPS vs. RHIC



cf. GW., Prog. Part. Nucl. Phys. 59(2007)374

8. Relativistische Hydrodynamik

Relativistische Effekte müssen in der Hydrodynamik berücksichtigt werden, wenn

1.) die Geschwindigkeit der makroskopischen Fluidströmung v mit der Lichtgeschwindigkeit c vergleichbar wird, oder

2.) die Geschwindigkeiten der mikroskopischen Bewegung der Fluidteilchen mit c vergleichbar werden.

Es werden relativistische Bewegungsgleichungen aufgestellt, die - für die ideale Flüssigkeit - den Euler-Gleichungen im nichtrel. Fall entsprechen. Wir definieren zunächst den

8.1 Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit

$$T^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3; \quad x^0 = ct; \quad x^1, x^2, x^3$$
$$i, k, l = 1, 2, 3$$

$$T^{00} = T_{00} \text{ Energiedichte, } c T^{0i} \text{ Energiesomdichte}$$

($\hat{=}$ nichtrelativistisch)

$$\frac{T^{0i}}{c} = - \frac{T_{0i}}{c} \text{ Impulssomdichte}$$

Lokales Ruhesystem: ruhendes Volumenelement, für welches das Pascalsche Gesetz gilt:

Der von einem bestimmten Flüssigkeitselement ausgeübte Druck ist in allen Richtungen gleich groß und überall senkrecht zu der Fläche, auf die er wirkt.

$$T^{ik} df_k = p df_i$$

(H122)

$$\Rightarrow \boxed{T_{ik} = p \delta_{ik}}$$

Die Komponenten der Impulsdichtedichte $\frac{T^{0i}}{c}$ sind im lokalen Ruhesystem gleich Null.

$T^{00} \equiv \varepsilon =$ Dichte der (inneren) Energie des Fluids im lokalen Ruhesystem

\Rightarrow Energie-Impuls-Tensor im lokalen Ruhesystem:

$$t^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Transformation in ein beliebiges (bewegtes)

Bezugssystem:

Ubergeschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung: u^α
Komponenten im lokalen Ruhesystem: $u^0 = 1, u^i = 0$

\Rightarrow Energie-Impuls-Tensor im bewegten System:

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}} \rightarrow t^{\alpha\beta} \text{ für } u^0 = 1, u^i = 0$$

$w = \varepsilon + p =$ Enthalpie pro Volumeneinheit.

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{cases} x^0, \mu=0 \\ -x^\mu, \mu=1,2,3 \end{cases}$$

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

metrischer Tensor:

In 3d-Schreibweise:

H123

$$T^{ik} = \frac{w u_i u_k}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + p \delta_{ik}$$

$$T^{0i} = \frac{w u_i}{c [1 - v^2/c^2]}, \quad T^{00} = \frac{w}{1 - v^2/c^2} - p = \frac{\varepsilon + p v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

Nicht-Relativistischer Grenzfall:

$v \ll c$ 1. kleine Geschwindigkeiten der
inneren ("mikroskopischen") Bewegungen der
Fluidteilchen

Beachte beim Grenzübergang: Die relativistische
innere Energiedichte ε enthält die Ruheenergie $m_0 c^2$
der n einzelnen Fluidteilchen.

Die Teilchenzahldichte n ist dabei auf die
Einheit des Ruhenvolumens bezogen. In den
nichtrelativistischen Ausdrücken wird jedoch die
Energiedichte auf die Volumeneinheit im Laborsystem
bezogen, in dem sich das Fluidelement bewegt:

$$m \cdot n \xrightarrow{v \ll c} \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \rho - \frac{\rho v^2}{2c^2}, \quad \rho = \frac{w}{v}$$

nichtrel. Massendicht

$$\begin{aligned} \text{nichtrel. innere Energiedichte} & \rho \cdot \varepsilon \ll \rho c^2 \\ \text{" Druck} & p \ll \rho \cdot c^2 \end{aligned}$$

$$m \cdot u \cdot c^2 \rightarrow \rho c^2 - \frac{\rho v^2}{2}$$

⇒ Nichtrel. Grenzwert für T_{00} (Energiedichte)

$$T_{00} = \rho c^2 + \rho \cdot \epsilon + \frac{\rho v^2}{2}$$

(Probe: $T_{00} - \rho c^2 = \rho \cdot \epsilon + \rho \frac{v^2}{2} \stackrel{!}{=} \text{Nichtrel. Energiedichte!}$)

↑
Ruheenergie

sowie der Impulstensor

$$T_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}$$

Beachte: Beim Übergang zum nichtrelativistischen Grenzfall geht der einfache Zusammenhang zwischen Impulsdichte und Energiedichte

$$c^2 \frac{T^{0i}}{c} = c T^{0i}$$

verloren, weil die nichtrelativistische Energie die Ruheenergie nicht enthält.

8.2 Relativistische Bewegungsgleichungen

für ideale Fluide (d.h. analog zur Euler-Gleichung im nichtrel. Fall) folgen direkt aus der

Energie- / Impulserhaltung:

$$\frac{\partial T_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0$$

mit $T^{\alpha\beta} = w u^{\alpha} u^{\beta} - p g^{\alpha\beta}$,

$w = \epsilon + p$ Enthalpie pro Volumeneinheit

In diesem Energie-Impuls-Tensor sind dissipative Prozesse (Viskosität, Wärmeleitung) nicht berücksichtigt, daher nur für ideale Fluide gültig (die Ableitung des Analogons zur Navier-Stokes-Gl. ist komplizierter)

Teilchenzahlerhaltung (Kontinuitätsgleichung):

u^α = 4-Vektor des Teilchenstromes

n^0 = Teilchenzahldichte

u^i = Vektor des Teilchenstromes,

$u^\alpha = n \cdot u^\alpha$, n = skalare Teilchenzahldichte

$$u^\alpha = \left(\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right) ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

In relativistischen Systemen mit Teilchenerzeugung wird die Teilchenzahl durch die Bedingungen des thermischen Gleichgewichts festgelegt.

Kontinuitätsgleichung: Die Divergenz des Stromvektors $\equiv 0$.

$$\boxed{\frac{\partial (n u^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0} \quad (*)$$

Zusammen mit dem Energie-/Impulstensor

$$T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} \text{ folgt:}$$

diffenzieren:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = u_\alpha \frac{\partial (w u^\beta)}{\partial x^\beta} + w u^\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = 0$$

Energie-/Impulserhaltung
↓

auf die Richtung von u^α projizieren: $u^\alpha \cdot$ |

benutze $u_\alpha u^\alpha = 1 ; \quad u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial (w u^\beta)}{\partial x^\beta} - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0$$

Ersetze $w u^\beta \equiv n u^\beta \cdot (w/n)$, benutze (*)

$$\Rightarrow n u^\beta \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{w}{n} - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right] = 0$$

Mit der Enthalpie $w = T \cdot s + p$ ($s =$ die auf die Einheit des Referenzvolumens bezogene Entropie)
 $dw = T ds + dp$
 $d\left(\frac{w}{n}\right) = T d\left(\frac{s}{n}\right) + \frac{1}{n} dp$

(\equiv Enthalpie für ein Teilchen; $\frac{1}{n}$ ist das auf ein Teilchen entfallende Volumen).

\Rightarrow der Ausdruck in [...] ist die Ableitung

$$T \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{s}{n} \right)$$

\Rightarrow ohne den Faktor $n \cdot T$ folgt

$$\boxed{u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{s}{n} \right) \equiv 0}$$

d.h. die Bewegung verläuft - wie bei nichtrel. idealen Fluiden - adiabatisch, die Entropie ändert sich nicht.

Mit der Kontinuitätsgleichung (*) lässt sich das in der Form schreiben

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\beta} (s u^\beta) = 0}$$

die Divergenz des Entropiestromes $s u^\beta$ verschwindet.

Die relativist. Verallgemeinerung der Eulerischen
Gleichung erhält man durch geeignete Projektion
 und Umformung der Gleichung für die Energie-/
 Impulserhaltung als

$$\rho u^\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} - u_\alpha u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta}$$

und für eine isentrope stationäre Strömung
 folgt die relativistische Verallgemeinerung der
Bernoullischen Gleichung als

$$\frac{\gamma \cdot w}{u} = \text{const} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \quad \text{für } u \ll c$$

Zur Ableitung der relativistischen Verallgemeinerung
 der Navier-Stokes-Gleichung siehe Literatur, z.B. Landau-
 Lifshitz, § 136.

9. Astrophysikalische Hydrodynamik

1428

Lit. u.a. S.N. Shore, An Introduction to
Astrophysical Hydrodynamics, Acad. Press, 1992

Statische und dynamische Probleme bei Fluiden
in nicht-terrestrischen Umgebungen.

- Da Sterne aus Gasen bestehen, sollten dort kinetische
Theorie / Gasdynamik dominieren. Da jedoch das
Gas meist i.W. homogen ist, und sein eigenes Gravitationsfeld
erzeugt, simuliert es die Bewegung eines Fluids im Feld.
Die mittlere freie Weglänge λ ist im Vergleich zu jeder
relevanten Größenskala der Sterne klein, so dass Störungen
"ausgewaschen" werden, und die Sternstruktur kontinuierlich

ist: $\lambda = \frac{u}{\sigma \cdot g}$; $\rho \approx 1.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ in stellare Materie
 $u = 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ at. Masseneinheit;
 $\Rightarrow \lambda = \frac{1.7 \cdot 10^{-27}}{1.5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-30}} \text{ m} \approx 0.3 \mu\text{m}$
 $\sigma \approx 40 \text{ mb} = 4 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2$
 $\ll R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$

\Rightarrow Sterne (und andere kosmische Materiekonzentrationen)
können stets auf bestimmten Längen- und/oder Zeitskalen
durch eine hydrodynamische Approximation beschrieben
werden. Alle Arten von hydrodyn. Fluss, die sich
auf der Erde beobachten lassen, finden sich auch
im Universum; jedoch auf wesentlich größeren Skalen:
- magneto-hydrodyn. Fluss,
- Turbulenz
- Überschallbewegung - Instabilitäten (Schocks), ...

Hier kann uns ein repräsentatives Kapitel herausgegriffen werden:

Schockwellen in der Astrophysik

Ursprung der theoret. Behandlungen von Schockwellen: - B. Riemann's Theorie über die Ausbreitung akustischer Störungen, ~1860.

- E. Mach, Laborsuche zu Überschall-Flow, ~1890

- L. Prandtl, Überschall-Grenzschichten, ~1940
(floss ins Mauthatten-Projekt ein)

In der Astrophysik sind Schockwellen eher die Regel als die Ausnahme. Viele der Beobachtung zugängliche Regionen im Universum sind weit entfernt von thermodynamischem oder mechanischem Gleichgewicht; oft sind die Zeitskalen für Energieabstrahlung sehr groß. Die Entweichgeschwindigkeiten sind für die meisten kosmischen Objekte viel größer als die Schallgeschwindigkeit, so dass alles Material, das ins interstellare Medium gelangt, supersonische Geschwindigkeiten haben muss und erst später Energie und Impuls abstrahlt, bis thermisches Gleichgewicht erreicht wird.

In interstellarem Medium und bei vielen stellaren Phänomenen ist die mittlere freie Weglänge so klein groß, dass die Viskosität in erster Ordnung vernachlässigbar ist. Astrophysikalische Schocks können dabei zunächst als nicht viskos behandelt werden, später wird die Dissipation an der Schockfront einbezogen.

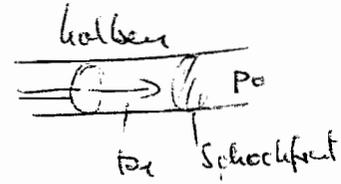
Schock-Erzeugung:

Da Schocks Diskontinuitäten im Fluss darstellen, müssen sie stark unkontinuierlich sein; sie entstehen als Ergebnis einer Instabilität, durch die der Fluss als Funktion der Geschwindigkeit unkontinuierlich wird.

Beispiel Schallwellen

- erfüllt Kontinuitäts- u. Bewegungsgleichung
- bei ausbreitender Dichte wächst die Ausbreitungsgeschwindigkeit

Ausbreitung einer Störung:

(1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0$ Kont. gl., 1dim. $u \rightarrow$ 

(2) $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ Bewegungsgl., 1dim
 [p(ρ) Zustandsgl.]

Mit $p = p(\rho)$; $\phi = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, $\Lambda = \ln \rho \sim \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$

\sim (2') $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \phi \frac{\partial \Lambda}{\partial x}$ (1') $\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + u \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial x}$

Kontinuitätsgl. (1') $\cdot \phi^{1/2} \sim \phi^{1/2} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \phi^{1/2} u \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = - \phi^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}$
 combine (1') & (2') \sim

$$\sim \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u - \phi^{1/2}) \frac{\partial u}{\partial x} = \phi^{1/2} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + (u - \phi^{1/2}) \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right] \right]$$

und Multiplikation mit $-\phi^{1/2}$ ergibt ein analoges Resultat.

\sim \exists eine Propagationsbedingung: Die Störung bewegt sich mit

$$u_{\pm} = u \pm \phi^{1/2}$$

Durch die Beziehung

$$\phi = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

gibt die Zustandsgleichung in die Propagationsbedingung ein.

Je nach der Abhängigkeit $p(\rho)$ des Drucks von der Dichte wird die Störung im Vergleich zur konstanten Schallgeschwindigkeit beschleunigt oder abgebremst.

Ist die Schallgeschwindigkeit dichte-unabhängig, bewegt sich die Störung mit konstanter Geschwindigkeit; ist die Schallgeschw. dichteabhängig, so steigt sie bei Kompression (da $\phi > 0$), die Welle beschleunigt.

Bedingung für die Wellenfront:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\pm} = u \pm \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2}$$

Linien in der (x, t) Ebene:
"Charakteristiken"

Riemann-Jacobstufen (1860)

oder

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \int \frac{d\rho}{\rho \cdot c_s}$$

Schallgeschw. ist eine Fkt der Dichte über die Zustandsgleichung, $p = k \rho^u$

$$c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{u \cdot p}{\rho}\right)^{1/2}$$

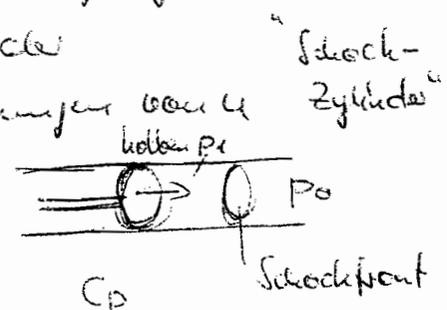
$$u = 1 + \frac{2}{\gamma} \quad u = \frac{c_p}{c_v} \text{ bei idealen Gasen}$$

Entlang der x definierten Trajektorien werden die erhaltenen Fluss-Größen durch das Fluid transportiert.

Ist in einer dieser Größen eine Diskontinuität

enthalten, wird sie ebenfalls ein durch die Riemann-Jacobstufen übertragene Trajektorie folgen.

z.B. u : Geschwindigkeit eines Kolbens, der in ein Gas stößt $\Rightarrow u$ ist äußere Bedingung für den Fluss. Ist er schneller als die Schall, kann er sich nicht an Änderungen von u anpassen.



Sei die Zustandsgleichung $p = k \rho^\kappa$, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{\pm} = u \pm \frac{2c_s}{\kappa - 1}$$

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Fluids ist

$$u_{\pm} = c_{s,0} \left(-1 \pm \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{2}} - 1 \right] \right)$$

$\kappa \equiv$ ungestütes Fluid.

\Rightarrow mit wachsender Dichte wächst die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

die Störung: darauf beruht die Ausbildung der Schockwelle.

An einem best. Punkt wird das elastischere Material das weniger elastisch überholen, die Schockfront baut sich auf.

Im Fluss gibt es dabei 3 erhaltene Größen:

- Massenfluss
- Impulsfluss
- Enthalpie-Fluss

daraus lassen sich Bedingungen für die Anleitung der thermod. Variablen links einer Schockfront ableiten:

Rankine-Hugoniot Bedingungen

5/3 für id. Gas

Bei gegebenem Dichte- oder Drucksprung und $u = const.$ lassen sich algebraische Bedingungen für die Änderung der übrigen thermodyn. Variablen langs der Schockfront ableiten:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1)p_2 + (\kappa-1)p_1}{(\kappa-1)p_2 + (\kappa+1)p_1}$$

1 vor dem Schock
2 nach "

$$u_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} u_1$$

$$\text{Impulserhaltung: } \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2$$

Bei starkem Schock: $p_2 \gg p_1$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\kappa+1}{\kappa-1}, \quad \kappa = \frac{5}{3} \text{ id. Gas} \rightarrow \textcircled{4} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

(z.B. $\kappa = \frac{4}{3}$
 $\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = 7$)

Die Kompression ist in einem Medium mit kleinerem κ (wie einem strahlungsdominierten Gas) größer, da das Medium stärker kompressibel ist. Da die Dichtesprung umgekehrt proportional zum Geschwindigkeitssprung ist, lassen sich die relevanten Größen durch Messen der Geschwindigkeiten über der Schockfront bestimmen.

(umgekehrt!)

Beim "Schockzyklon" ist der Drucksprung gegeben, und der Geschwindigkeitssprung lässt sich aus den R-H Bedingungen bestimmen.

• Flare an der Sonnenoberfläche: ("Explosion") $1s \rightarrow 1h$; X-ray, ~~Radio~~

bedeutungsv. Phänomene, Strahlung u. Teilchen werden aus
einer kleinen Region in kurzer Zeit freigesetzt

Expandiert in die Corona und das interplanetare Medium (ρ klein):

Schockwelle (was waren die Bedingungen bei der Entstehung?)
 \rightarrow R-H-Bedingungen anwenden.

• Supernova

Die Expansionsgeschwindigkeit lässt sich anhand der
Spektralanalyse der Emissionslinien messen. Wie
vermischt sich die Materie mit dem interstellaren Medium,
und was lässt sich über die Produktion der schweren
Elemente bestimmen? R-H Bedingungen und Geschw. sprang \rightarrow
Plasma-Diagnostik zur Berechnung der Häufigkeiten
aus den gemessenen Emissionslinien.

• HII-Regionen (z.B. H42 im Orion; 4 heiße Sterne im ^{HII} Nebel)
(Einfach ionisierter Wasserstoff)

Sterne im Zentrum einer diffusen gasförmigen Medium (ISM),
erzielen ionisierung, um das Medium zu ionisieren.

Scheint die Sterne lange genug, wird genügend Energie in
das Medium gepumpt, dass es sich aufheizt und expandiert

\rightarrow Eine Front mit einer Diskontinuität in Druck und Ionisation
bewegt sich auswärts im ISM: "Ionisations-Schock"
mit einer Diskontinuität in der Entkoppelung über die Ionisations-
regionen.

Die Ionisierung verändert die Enthalpie und die Exergie des Gases zu "schwacher" Schock. Auch expandierende Front entsteht eine komplexere Struktur; i.W. bewegt sich jedoch eine heiße ionisierte Region in der heiße ISM.

Erweiterte Probleme:

• Zusätzlicher magn. Feld:

Erhaltung des magn. Flusses, & weitere fl. zu R-H, die analog zur Erhaltung des Masse-flusses ist; die Sprung-konditionen an der Schockfront ändern sich.

• Wechselwirkende Schocks

Für die meisten hydrodyn. Probleme in der Astrophysik sind numerische Rechnungen die Regel. Manchmal sind jedoch analytische Abschätzungen u. Überschlagsrechnung nützlich. Beispiel:

Dichteschokwellen: Spiralarm-Schock in Galaxien

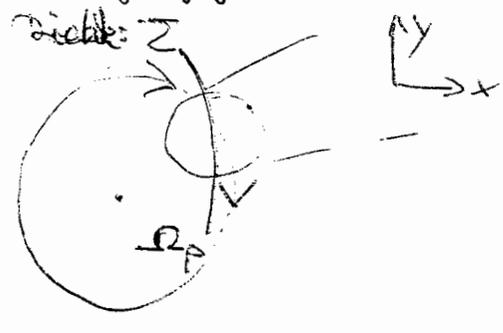
flache Spiralgalaxie mit Dichtestörung in der stellaren Komponente der Scheibe

& Störung im Gravitationspotential über die Poisson-Gleichung; Gas strömt durch die Scheibe und reagiert auf die Störung; bei Dichtestörungen kann durch

Gravitationsbeschleunigung Überschall-geschwindigkeit erreicht werden.

"Das Gas beschleunigt wenn es in den Schock und bremsen ab
die Störung erzeugt Grav. potential eintritt, und bremsen ab
bei A. J. 41 1980 in IAU... Bewegung d. zellen über Schock-lösung: bei Roberts, Astrophys. J. 158 (1969) 123

Bewegungsgl. im rotierenden Bezugssystem



- 1
- Dichtewelle mit Frequenz Ω_p
- dünne Scheibe aus f_0 u. Σ (Strom)
- nur alte Strom untersteht die Welle
- langsame Bewegung der Welle im Vergleich zur Rot.frequ. der (Alasie)

↳ lokale Analyse

Stationärer Fluss,

Kontinuitätsgleichung:
$$\frac{\partial \Sigma u}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma v}{\partial y} = 0$$

u : Geschw. der Dichtewelle
 v : Geschw. der Rotation
 $\frac{dv}{dx} = -f$

Bewegungsgl.:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + f v = -\frac{c_s^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - f u = -\frac{c_s^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

- Sei der Fluss $\parallel \vec{x}$ - Richtung
- keine Abhängigkeit der Bewegung von y

Grav. Potential entwickeln:
$$\phi(x, y) \approx \phi_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} y^2$$

lokales Dichtemaximum $\hat{=}$ Spiralarm
 Dichte konstant langs der Arm \approx 2. Term vernachlässigt

↳ approx. eq. für u :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + f v = \frac{c_s^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 x^2 (*)$$

kont. gl.

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \Sigma}{\partial x} = 0$$

→ Druckterm in (*) eliminieren & Fluss approx.

(H13)

$$\frac{1}{u} (u^2 - c_s^2) \frac{\partial u}{\partial x} = f_0 - \phi_0'' x$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x} = -f_0 \quad \text{für die } x\text{-Komponente, } \perp \text{ zum lokalen Arm}$$

→ Das Gas wird in Richtung auf das galakt. Zentrum abgelenkt als Folge der Störung; dort entsteht es das zentrale schwarze Loch als Akkretionsmaterial.

10. Hydrodynamik der Superflüssigkeiten

10.1 Grundlagen

"Quantenflüssigkeiten": In der Nähe des absoluten Nullpunkts werden Quanteneffekte wichtig. Bis 0K bleibt was Helium flüssig:

- ^4He : Ionen und Atome haben spin 0 \Rightarrow Bose-Einstein-Statistik "Bose-Flüssigkeit"
- ^3He : " " " " " " $\frac{1}{2}$ \Rightarrow Fermi-Dirac "Fermi-Flüssigkeit"

Hier zunächst auf den Bose-Fall konzentrieren.

λ -Punkt in flüssigem ^4He :

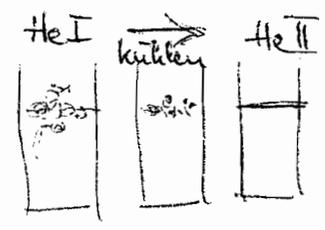
kühlt man unter dem Siedepunkt von 4.2K durch Evaporation (Vakuum-Pumpe!), "kocht" ^4He mit kleinen Bläschen. Am λ -Pkt bei 2.18K (Übergang von He I zu He II) "kocht" es plötzlich stark auf, um ausbleibend völlig aufzuklären: ^4He ist

superflüssig geworden. - Wärme wird nahezu widerstandslos abgeleitet, die Wärmeleitfähigkeit steigt unterhalb des λ -Punktes um $\approx 10^6$ fache.

- Die Viskosität sinkt ebenfalls um das 10^6 fache (Messung: Fluss durch Kapillare), P. d. Kapitza 1938

- ^4He kriecht als dünne Filme Wände hoch

Die Wärmekapazität übersteigt am Phasenübergang.



$2.18\text{K} < T < 4.2\text{K}$ $T = 2.18\text{K}$ $T < 2.18\text{K}$

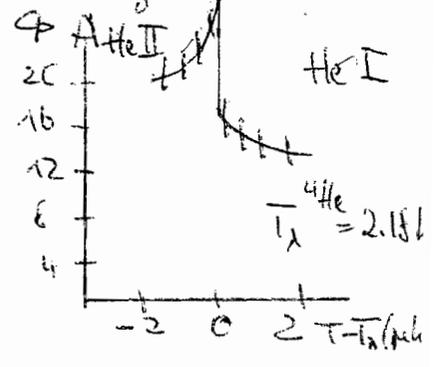
λ -Übergang:

Phasenübergang 2. Ordnung:

o.a. Knick im T-S-Diagramm; Behn

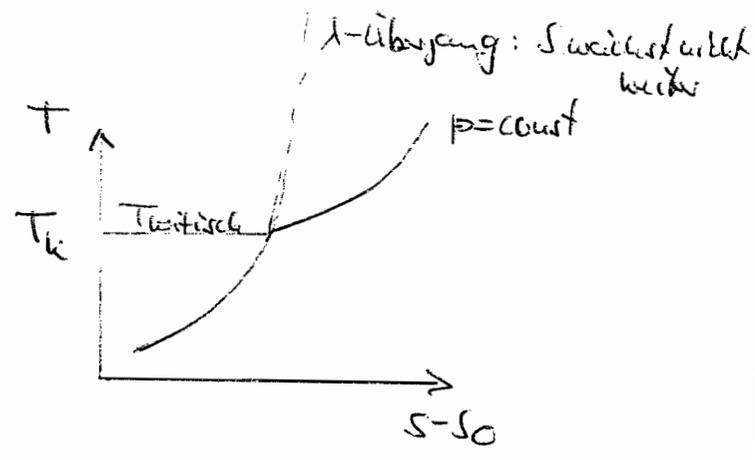
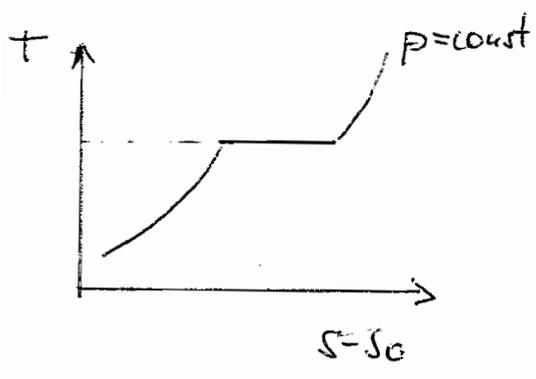
λ -Übergang: T-Temp

Die Wärmekapazität zeigt λ -Form:



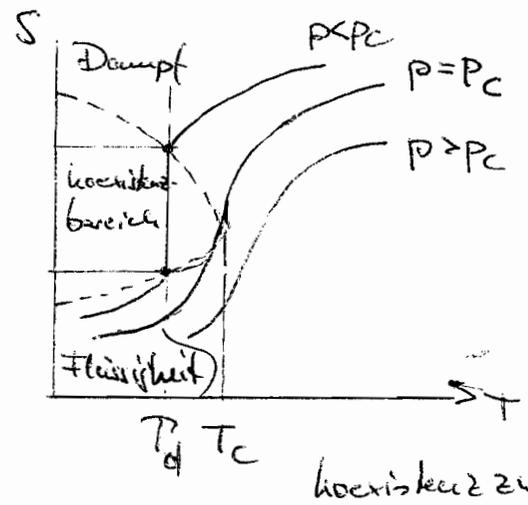
Densitäten sind Phasenübergänge 1. Ordnung durch einen Sprung in der Entropie S [und der Divergenz der Wärmekapazität und der Kompressibilität]

skizziert:



Phasenübergang 1. Ordnung:
 zusätzliche Wärmeaufnahme während des Phasenübergangs
 $\Delta Q = C \Delta T$, $C =$ Wärmekapazität
 $C \rightarrow \infty$ am Phasenübergang

2. Ordnung; beim λ -Übergang: kein Sprung, aber es Ableitung



Die Fermi-Flüssigkeit ^3He wird ebenfalls superfluid, jedoch erst bei $T \leq 10^{-3} \text{ K}$

Die Hydrodynamik ist charakteristisch als bei ^4He wegen des komplizierteren Ordnungsparameters, [heißt hat ^4He einen geringen Anteil $13 \cdot 10^{-3} \text{ } ^3\text{He}$ als Verunreinigung]

Die Hydrodynamik der superfluiden Flüssigkeit kann auf ein Basis der mikroskopischen Theorie (Lifshitz 1940, d.D. Landau 1941) entwickelt werden.

Hib. Theorie von He II (L. Landau 1941) L. Tisza 1940: makro. 2-Fluid-Modell

$T_1 > T > 0$: He II verhält sich wie ein Gemisch aus 2

Flüssigkeiten) superfluid, ohne Viskosität } Es wird keine Wärme
2) normal, viskos } über 1 & 2 übertragen: keine Reibung

Strom: 2 gleichzeitig 2 Strömungen, die durch eine bestimmte eff. Masse beschleunigt sind: eine normal, die andere superfluid. Es handelt sich dabei nicht um die „Komponenten“ einer „Gemisch“.

↳ Kapillarströmung von He II: Im Spalt konzentriert sich die superfluide Strömung („die normale bildet den Gefäß“ und strömt mit normaler Viskosität durch den Spalt).

Rotierende Scheibe in He II: Erzeugt normale Strömung mit der dazugehörigen Viskosität (Messung d. Zähigkeit durch Dämpfung von Torsionsschwingungen ergibt normalen η -Wert).

Die superfluide Strömung transportiert keine Wärme. Sie ist stets eine Potentialströmung.

Die normale Strömung ist eine Strömung der „Poren der Elementarbewegung“; die Anregungen behalten sich wie Quasikristalle, die sich in Flüssigkeitspotentialbewegungen und bestimmte Impulse und Energien haben.

Die Entropie von He II wird durch die statistische Verteilung der Elementarbewegungen bestimmt. Deshalb wird bei jeder Strömung, bei der die Poren der Elementarbewegungen in Ruhe bleibt, keine Entropie.

Wärmeübertragung: Eine superfluide Strömung verursacht keine Entropieübertragung und keinen Wärmetransport & eine rein superfluide

Strömung in He II ist hydrodynamisch reversibel.

Mechanismus für den Wärmetransport in He II ist die
 Wärmeübertragung durch die normale Strömung der Flüssigkeit.
 Jede Temperaturdifferenz ruft eine normale und eine superfluide
 innere Strömung hervor; sie können sich teilweise über Massen
 kompensieren, so dass kein realer Massentransport stattfindet.

Sei \vec{v}_s : Geschwindigkeit der superfluiden Wärmeströmung
 \vec{v}_n : " " " normalen

$\vec{v}_n \cdot \rho \cdot s$: Entropiestromdichte, s = Entropie pro Masseneinheit

$q = \rho \cdot T \cdot s \cdot \vec{v}_n = \rho \cdot T \cdot \vec{v}_n$ = Wärmestromdichte

Die superfluide Strömung ist eine Potentialströmung:

$\vec{\nabla} \times \vec{v}_s = 0$ | $\forall t$, im ganzen Volumen der Flüssigkeit

Die Elementaranregungen mit großer Wellenlänge
 ($\hat{=}$ kleinen Energien und Impulsen) sind Schall-
 quanten (Phononen), und die makroskop. Hydro-
 dynamik der superfluiden Strömung lässt keine
 anderen Schwachpunkte als Schallschwächungen zu.

Eine Potentialströmung übt keine Kraft auf einen stationär
 umströmten festen Körper aus ("d'Alembertscher
 Paradoxon")

In einer normalen Strömung hat ein Körper einen Widerstand.
 Kompensieren sich normale und superfluide Massenstrom, wirkt
 auf Körper in He II eine Kraft, obwohl kein reaktiver Massenstrom
 vorhanden ist.

10.2 Hydrodynamische Gleichungen für He II

Die hydrod. Strömung ist durch die
2 Geschwindigkeiten \vec{v}_s, \vec{v}_n bestimmt

Gleichungen folgen als die (skalar-) Erhaltung (nichtrel.)
und die notwendigen Erhaltungsätze.

Bei genügend großen Strömungsgeschw. verliert He II seine Superfluidität
(Grenzgenschw., kritische Geschw.); dennoch die fl. für beliebige
Geschw. ableiten, kann zu einem v_s übergehen.

Massenstromdichte = Impuls pro Volumeneinheit:

$$\vec{j} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n \quad \rho_s: \text{superfluide Dichte}$$

ρ_n : normale

$$\rho = \rho_s + \rho_n$$

$\rho_n \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$ (in reinem ^4He)

$\rho_s \rightarrow 0$ für $T \geq T_\lambda$ normales Fluid

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

kont. gl., Massenerhaltung

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Impulserhaltung; $\Pi_{ik} = T_{ik}$ als
Impulsstromdichte

zuerst dissipative Prozesse vernachlässigen

\rightarrow reversible Strömung, Entropie bleibt erhalten

$$\text{Entropiestrom} = \rho_s \cdot \vec{v}_n$$

↳ Eulergleichung:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot s \cdot \vec{v}_u) = 0$$

↳ Bedingung für Potentialströmung im Anteil \vec{v}_s :

Ableitung von $\vec{v}_s = \text{Gradient}$ eines Skalars:

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{v}_s^2}{2} + \mu \right) = 0 \quad \text{mit } \mu \text{ Skalar}^{\oplus}$$

Π_{ik} und μ müssen noch festgelegt werden, aus dem
Energieerhaltungssatz und der Galilei-Transformation

$$\hookrightarrow \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{Q} = 0, \quad \vec{Q} = \text{Energiestromdichte}$$

μ wird mit dem chem. Potential \oplus

Mit der Galilei-Transformation lässt sich die Zusammenfallen
z.u.)

Abhängigkeit aller Größen von \vec{v}_s bei fester Relativgeschwindigkeit

$\vec{v}_u - \vec{v}_s$ bestimmen (dazu muss Koordinatensystem erdfehlen,

in dem die Geschwindigkeit der superfluiden Strömung eines
festen Fluidelements \vec{v}_s ist, und das sich mit \vec{v}_s relativ zum
ursprünglichen System bewegt)

$$\vec{f} = \rho \vec{v}_s + \vec{f}_0 \quad \text{=: Größen im bewegten System}$$

$$E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \vec{f}_0 \cdot \vec{v}_s + E_0$$

$$\vec{Q} = E \vec{v}_s + \frac{v_s^2}{2} \vec{f}_0 + \Pi_0 \vec{v}_s + \vec{Q}_0$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} f_{0k} + v_{sk} f_{0i} + \Pi_{0ik}$$

$$dE_0 = \mu dg + T d(\rho s) + (\vec{v}_u - \vec{v}_s) d\vec{j}_0 \quad \mu = \text{chem. Potential}$$

$$p = -E_0 + T \rho s + \mu \rho + \rho u (\vec{v}_u - \vec{v}_s)^2 \quad \text{Druck (freie Enthalpie pro Masse - Einheit)}$$

E, Q in Erweitertes Erhaltungssatz einsetzen, Zeitableitung mit Hilfe der hydro. Gleichungen eliminieren (umfangreiche Rechnungen!) $\rightarrow \dots \approx$

$$\vec{Q} = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2}\right) \vec{j} + T \rho s \vec{v}_u + \rho u \vec{v}_u \left[\vec{v}_u (\vec{v}_u - \vec{v}_s) \right]$$

$$\Pi_{ik} = \rho u_i v_{ik} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p \delta_{ik}$$

$\rightarrow \rho v_i v_k$ in der üblichen Hydrodynamik

Damit ist das vollst. System der hydrodyn. Gleichungen definiert. Die Größen ρ, ρ_u, μ, s sind nicht nur Funktionen der thermoodyn. Zustände p, T , sondern auch der Geschwindigkeit der Strömung $w^2 = (\vec{v}_u - \vec{v}_s)^2$. Shalor, der gegenüber Galilei-Transformation des Bezugssystems und Drehung der gesamten Flüssigkeit invariant ist.

Die Gleichungen vereinfachen sich im phys. relevanten Fall nicht zu großer Geschwindigkeiten (Verhältnis von v_u, v_s zu Ausbreitungsgesch. des zweiten Schalls): Abhängigkeiten von ρ_u, ρ_s von w vernachlässigen, übrige thermoodyn. Größen nach Potenzen der Geschwindigkeit entwickeln. z.B.:

$$s(p, T, \vec{w}) \approx s(p, T) + \frac{w^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_u}{\rho}$$

$$\rho(p, T, \vec{w}) \approx \rho(p, T) + \frac{\rho^2 w^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_u}{\rho}$$

+ Randbedingungen: An jeder festen ruhenden Oberfläche muss die dazu \perp komponente der Massenkonz. \vec{i} verschwinden.

findet man die Tangentialkomponente von \vec{v}_n auch wandverschoben: (H445)

$$\vec{v}_{n||} = 0 \text{ auch wand}$$

$$\vec{v}_{n\perp} \text{ stetig}$$

Für \vec{v}_s übliche Randbed. für eine ideale, bei \vec{v}_n für eine reine Flüssigkeit.

Zur Berücksichtigung dissipativer Prozesse ist - wie in der gewöhnlichen Hydrodynamik - die Einführung zusätzlicher Terme erforderlich, die linear in den räuml. Ableitungen von \vec{v}_n und T sind.

Dabei werden 5 unabhängige kinetische Koeffizienten ($\eta, \zeta, \xi, \zeta_1, \zeta_2$) eingeführt; die "erste Zähigkeit" η ist mit \vec{v}_n verknüpft (analog η gewöhnl.) ζ ist analog zur Wärmeleitfähigkeit eines normalen Fluids.

Die "zweite Zähigkeit" ξ wird jetzt durch 3 Koeffizienten ersetzt.

10.3 Schallausbreitung in Superfluiden

- Strömungsgeschw. in der Schallwelle als klein voraussetzen
- ρ, p, s weichen nur wenig von ihren Gleichgewichtswerten ab

Hydrod. Gleichungssystem durch Vernachlässigen quadrat. Glieder linearisieren:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \rightsquigarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0 \right.$$

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \rho s \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_n = 0 \quad (\rho s \text{ vor } \vec{\nabla} \text{ setzen, da dieser Term schon } \vec{v}_n \text{ enthält)}$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} + \vec{\nabla} \mu = 0$$

$$\rightsquigarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\Delta p$$

$$-\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p}$$

Erste Gl. nach t differenzieren, in 3. einsetzen

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p$$

und mit thermodyn. Identitäten folgt nach einigen

Umformungen

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T$$

Diese Gl. beschreiben die Schallausbreitung im Superfluid.
Da es zwei Fluiden gibt, folgen zwei Geschwindigkeiten
der Schallausbreitung.

Für $\rho_s = 0$ (nur normales Fluid) bleibt nur die gewöhnliche
Schallgeschwindigkeit

$$u^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \text{ während sich allgemein ergibt}$$

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_0} \right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = 0$$

mit

$$u_1 = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{\rho_n}}$$

$$c \approx c_p \approx c_v$$

(dank c_v)

nahezu
konstant

stark T-abhängig, beschleunigt
mit ρ_s am λ -Punkt.

"zweiter Schall"

Nähe am λ -Punkt löst sich die Unbedeutendheit $c_p - c_v$ nicht vernachlässigen; es folgt

$$u_2 = \sqrt{\frac{\gamma s^2 \rho_s}{c_p \rho}}$$

Bei sehr niedrigen Temperaturen sind fast alle Eckwertausregungen im Fluid Phononen, und es gilt

$$c = 3s, \quad \rho_u = \frac{c T \rho}{3 u_1^2}, \quad \rho_u \approx \rho \quad \checkmark$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\gamma s^2 \rho_s}{c^2 \rho} \cdot 3 u_1^2}$$

$$u_2 = \frac{s}{c} u_1 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{3} u_1 \sqrt{3} = \frac{u_1}{\sqrt{3}}$$

$$T \rightarrow 0: \quad u_2 \rightarrow \frac{u_1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{u_1}{u_2} \rightarrow \sqrt{3} \quad T \rightarrow 0$$

In einer Welle der zweiten Schalls schwingen normale und superfluide Flüssigkeit gegeneinander, die resultierende Massenschw ist Null.

In einer Schallwelle der normalen (ersten) Typs ist $u_1 \approx u_2$ (bei einer stehen Welle), d.h. die Flüssigkeit in jedem Volumenelement schwingt als Ganzes, normale und superfluide Masse bewegen sich gegeneinander - entsprechend periodischen Schallwellen.

Strömungen von Superfluiden lassen sich nicht wie gewöhnliche Strömungen durch eine Reynoldszahl charakterisieren; bekannt abhängig die Strömungsgeschwindigkeiten, und die Theorien zur Turbulenzentstehung sind aktuell anwendbar.

Rotation ist nur durch Bildung von Wirbelrädern möglich, die eine quantisierte Zirkulation tragen; sie können nicht geschlossen sein. [siehe "Jukemittelt" Sichtung between Periodical Flow and Turbulence in Superfluid He. H. Nikmetz]

H. H. Nikmetz, St. I. Science, Cond-mat/0009299, PR1 (2001)