7. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen am 6.6.07

Aufgabe 1: Kondensator als von Neumann Problem (1 Punkt)

Inwiefern kann man die Frage nach der Kapazität eines Kugel-, Zylinder- oder Plattenkondensators als von Neumann Randwertproblem auffassen?

Aufgabe 2: Biot-Savart Gesetz (4 Punkte)

Ein zu einem Quadrat der Seitenlänge $2a$ gebogener Draht liegt in der x-y-Ebene (Ursprung im Mittelpunkt). Durch ihn fließt der Strom I im Uhrzeigersinn. Berechnen Sie das Magnetfeld auf der z-Achse aus der Biot-Savart-Formel.

Aufgabe 3: rotierende geladene Kugel (1+4+2 Punkte)

Eine Kugel (Radius R) mit homogener Oberflächenladungsdichte $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$ um die z-Achse. Wir wollen das $\vec{B}$-Feld aus einem Ansatz bestimmen (das $\vec{E}$-Feld soll uns hier nicht weiter interessieren).

a) Wie groß sind die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$?

b) Jemand behauptet, ein geeigneter Ansatz für $\vec{B}$ sei

$$\vec{B} = f(r) z \vec{r} - g(r) \vec{e}_3, \quad r = |\vec{r}|.$$

Wie weit legen die (differentiellen) Vakuum-Maxwell-Gleichungen im stromfreien Außen- und Innenraum die Funktionen $f(r)$ und $g(r)$ fest? Es bleiben zwei Konstanten übrig; welche ist innen und welche ist außen Null?

c) Bestimmen Sie die beiden noch unbekannten Konstanten. Betrachten Sie dazu die Maxwell-Gleichungen auf der Kugelschale, d.h. wenn r auch den Wert R durchläuft.

[2cm]

Aufgabe 4: Berechnung des Stroms aus dem Magnetfeld (3 Punkte)

Im Vakuum soll ein Magnetfeld der Form $\vec{B} = f(\rho)\vec{e}_3$ erzeugt werden ($\rho^2 = x^2 + y^2$, $f(\rho)$ vorgegeben). Welche Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ ist dazu erforderlich? Was ergibt sich speziell für $f(\rho) = B_0\Theta(\rho - R_1)\Theta(R_2 - \rho)$? Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 5: gyromagnetisches Verhältnis (1+1+1 Punkte)

Ein starrer Körper mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und der Massendichte $\rho_m(\vec{r})$ rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \text{const.}$

a) Geben Sie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an, und drücken Sie das magnetische Moment $\vec{\mu}$ dieser Stromverteilung durch ein Integral aus.

b) Wie lautet die analoge Integraldarstellung für den Drehimpuls $\vec{L}$ des Körpers?

c) Zeigen Sie unter der Annahme, dass die Ladung q und die Masse m in gleicher Weise in diesem Körper verteilt sind

$$\frac{\rho_m(\vec{r})}{m} = \frac{\rho(\vec{r})}{q} = f(\vec{r}) \qquad (f(\vec{r}) \text{ beliebig, aber fest vorgegeben}),$$

dass das magnetische Moment $\vec{\mu}$ und der Drehimpuls $\vec{L}$ proportional zueinander sind, und bestimmen Sie den Proportionalitätskoeffizienten (das sog. gyromagnetische Verhältnis).

Aufgabe 6: magnetisches Moment (2 Punkte)

Durch eine Drahtschleife, die eine Kurve der Form

$$\vec{r}(s) = \left(R\sin s, aR\sin^2 s, R\cos s\right), \quad 0 \le s \le 2\pi, \quad R, a = \text{const.}$$

beschreibt, fließt ein Strom I. Berechnen Sie das magnetische Moment.