(5) RQM- Aufgaben 19.05.2011

<u>Zeigen Sie:</u> In der Dirac-Theorie gibt es einen erhaltenen Viererstrom, dessen nullte Komponente eine positive Dichte ist.

<u>Beweis:</u> Multipliziere die DE mit dem adjungierten Zeilenvektor

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \dots \psi_4^*) \quad \cdot|$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\, \psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \psi^+ \alpha^k \partial_k \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi$$

die dazu komplex konjugierte Relation ist

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} (\partial_k \psi^+) \alpha^{k+} \psi + \psi^+ \beta^+ \psi$$

Die Differenz beider Gleichungen ist $\cdot(-i/\hbar)$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) = -c \left[(\partial_k \psi^+) \alpha^{k+} \psi + \psi^+ \alpha^k \partial_k \psi \right] +$$
$$+ \frac{imc^2}{\hbar} (\psi^+ \beta^+ \psi - \psi^+ \beta \psi)$$

mit $\frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) = \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^+}{\partial t}$.

Dies hat die Form einer Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \vec{j} = 0}$$

& α^k, β hermitesch; für $\beta^+ = \beta$ fällt der Massenterm weg, die 0te Komponente

$\rho = \psi^+ \psi$ ist eine positiv definite Dichte, und
$j^k = c\, \psi^+ \alpha^k \psi$ ist die Stromdichte $\Rightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$
mit $j^\mu = (j^0, j^k)$.

(6) Aufgabe 9.06.2011 RQM

a) Zeigen Sie: $\gamma^k \equiv \beta\alpha^k$ ist antihermitesch:

$$(\gamma^k)^+ = -\gamma^k \quad ; \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$$

Beweis: $(\gamma^k)^+ = (\beta\alpha^k)^+ = \alpha^k\beta = -\beta\alpha^k = -\gamma^k$ ✓

$$(\gamma^k)^2 = \beta\alpha^k \cdot \beta\alpha^k = \beta(-\beta\alpha^k)\alpha^k$$

$$= -\beta^2(\alpha^k)^2 = -\mathbb{1}$$ ✓

b) Zeigen Sie: Die Dirac-Matrizen haben die algebraische Struktur ("Clifford-Algebra")

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad ; \quad (\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}$$

Beweis:

$$\{\gamma^0, \gamma^k\} \equiv \gamma^0\gamma^k + \gamma^k\gamma^0 = \beta\beta\alpha^k + \beta\underbrace{\alpha^k\beta}_{=-\beta\alpha^k} = 0$$

$$\{\gamma^k, \gamma^l\} = \gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k = \beta\alpha^k\beta\alpha^l + \beta\alpha^l\beta\alpha^k =$$

$$= -\alpha^k\beta\beta\alpha^l - \alpha^l\beta\beta\alpha^k =$$

$$= -\alpha^k\alpha^l - \alpha^l\alpha^k = \left\{\begin{matrix} 0, & k \neq l \\ -2, & k = l \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2(\gamma^\mu)^2 = 2g^{\mu\mu} \Rightarrow (\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}$$ ✓

7 Aufgabe 16.06.2011 RQM

a) Zeigen Sie: Die Transformationsmatrix

$$S' = \gamma^5 \gamma^0 \quad \text{mit} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

charakterisiert die Zeitumkehr-Transformation in der DIRAC-Theorie: Sie führt γ^0 in $-\gamma^0$ über, und lässt γ^j ungeändert.

__Beweis__:
$$S'^{-1}\gamma^0 S' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & +\mathbb{1} \end{pmatrix} = -\gamma^0 \quad \checkmark$$

$$S'^{-1}\gamma^j S' = \gamma^j \quad \text{analog}$$

b) Prüfen Sie durch Einsetzen:

Der Spinor
$$\hat{\psi}(\vec{x},t) = S'\psi(\vec{x},-t) = \gamma_5\gamma^0\psi(\vec{x},-t)$$

erfüllt die DIRAC-Gleichung!

8) RQM Aufgaben

a) Die Radialgleichungen der DIRAC-Gleichung mit skalarem Potential $V(r)$ sind

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right] P_{Ek}(r) = \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c} Q_{Ek}(r)$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right] Q_{Ek}(r) = - \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c} P_{Ek}(r).$$

Leiten Sie eine DGL 2. Ordnung für $P_{Ek}(r)$ daraus ab (durch Eliminieren von $Q_{Ek}(r)$).

Lösung: siehe Skript Seite 75.

b) Berechnen Sie die DIRAC-Energieeigenwerte für ein Elektron im wasserstoff-ähnlichen Bleiatom ($Z=82$) im $1s_{1/2}$, $2s_{1/2}$, $2p_{3/2}$ Zustand in erster relativistischer Näherung.

Lösung:

$$E_{nj}^{D} = E_n^{(0)} \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right) \mp \dots \right]$$

$$E_n^{(0)} = \frac{m_e c^2 (Z\alpha)^2}{2n^2} = \frac{Z^2}{n^2} \cdot 13.6\,\mathrm{eV} \overset{Z=82}{=} \frac{91.446}{n^2}\,\mathrm{keV}$$

Relativist. Korrektur:

$$\frac{(Z\alpha)^2}{n^2}\left[\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right] \simeq \frac{0.358}{n^2}\left[\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right]$$

Bindungsenergien in Pb ($Z=82$)

$1s_{1/2}$: $E^{D}_{1s_{1/2}} \simeq \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Schrödinger-}\\ \text{Wert}}}{91.446} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Relat.}\\ \text{Korrektur}}}{1.0895}\ \text{keV} \simeq \underline{99.6\ \text{keV}}$

$2s_{1/2}$: $E^{D}_{2s_{1/2}} \simeq \frac{91.446}{4} \cdot 1.1119\ \text{keV} \simeq \underline{25.4\ \text{keV}}$

($= 2p_{1/2}$!)

$2p_{3/2}$: $E^{D}_{2p_{3/2}} \simeq \frac{91.446}{4} \cdot 1.0223\ \text{keV} \simeq \underline{23.4\ \text{keV}}$

Diese Ergebnisse gelten für eine Punktladung mit $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$. Bei Berücksichtigung der ausgedehnten Ladungsverteilung ($R = 1.2\,A^{1/3}$ fm $\simeq 7.11$ fm für ^{208}Pb) verschieben sich die Werte.

Experimentell findet man

$$E^{exp}_{1s_{1/2}} = 88.005\ \text{keV}$$

$$E^{exp}_{2s_{1/2}} = 15.861\ \text{keV}$$

$$E^{exp}_{2p_{3/2}} = 13.035\ \text{keV}$$