

Von den Elastica zu den schwimmenden Körpern im Gleichgewicht

Franz Wegner
Institut für Theoretische Physik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Deutschland

August 25, 2020

Abstrakt

Dies ist eine deutsche Übersetzung des Abschnittes 2 von "From Elastica to floating bodies of equilibrium" [1]. Ein kurzer historischer Abriss der Kurven, die bei den zweidimensionalen schwimmenden Körpern im Gleichgewicht und dem Radspurproblem auftreten, wird gegeben. Bor, Levi, Perline and Tabachnikov fanden, dass sie bereits als *Elastica* von Bernoulli und Euler and als *Elastica unter Druck* oder als *Eingedellte Ringe* von Levy und Halphen angegeben wurden. Auerbach beobachtete, dass Zindler die Kurven für das Problem der schwimmenden Körper im Gleichgewicht angegeben hatte. Eine noch größere Klasse von Kurven löst das Radspurproblem.

Die folgenden Abschnitte, die hier nicht wiedergegeben werden, behandeln ergänzende Einzelheiten: Mehrere Herleitungen der Gleichungen für die Elastica und Elastica unter Druck werden gegeben. Eigenschaften der Zindler Kurven und einige Arbeiten über das Problem der schwimmenden Körper im Gleichgewicht durch andere Mathematiker werden betrachtet. Spezielle Fälle der Elastica unter Druck reduzieren sich auf algebraische Kurven, wie Greenhill gezeigt hat. Da die meisten Kurven, die hier betrachtet werden, Radspurkurven sind, werden einige Bemerkungen zu diesen hinzugefügt.

1 Einleitung

Miklós Rédei führt in seinem Papier "On the tension between mathematics and physics" [42] (Über die Spannung zwischen Mathematik und Physik) das "Supermarkt Bild" der Beziehung von Mathematik und Physik ein: dass Mathematik wie ein Supermarkt und Physik ihr Kunde sei.

Als Auerbach 1938 das Problem der Schwimmenden Körper im Gleichgewicht [2] für die Dichte $\rho = 1/2$ löste, konnte er in den Supermarkt 'Mathematik' gehen und fand die Lösung in Form der Zindlerkurven [63].

Als ich über dieses Problem für Dichten $\rho \neq 1/2$ nachdachte, fand ich eine Differentialgleichung, ging zum Supermarkt und fand die elliptischen Funktionen als Zutat für die Lösung. Aber in dem riesigen Supermarkt fand ich nicht das Endprodukt. Später zeigten mir Bor, Levi, Perline, and Tabachnikov[7] das Regal, wo die Begrenzungskurven schon im 19. Jahrhundert als *Elastica* unter Druck hingestellt worden waren. Der lineare Grenzfall, den ich auch betrachtet hatte, war schon im 17. Jahrhundert als *Elastica* von Jakob Bernoulli[4, 5] und im 18. Jahrhundert von Leonhard Euler[14] bereit gestellt worden. Glücklicherweise hat gute Mathematik kein Verfalldatum.

Abschnitt 2 bringt einen kurzen historischen Überblick der Kurven und ihrer Anwendungen unter den Namen *Elastica* und *Elastica unter Druck* oder *Eingedellte Ringe*. Diese Kurven, bekannt seit dem 17. und 19. Jahrhundert, zuerst als Lösungen elastischer Probleme, sind auch als Lösungen etlicher anderer Probleme aufgetreten, insbesondere als Berandungen zweidimensionaler Körper, die in allen Orientierungen im Gleichgewicht schwimmen können; dieses letztere Problem wird auch durch *Zindler-Kurven* gelöst.

Diese Klassen von Kurven liefern Lösungen des Radspurproblems. Bei diesem Problem sucht man Spuren des Vorder- und des Hinterrades eines Fahrrades, die einem nicht erlauben, zu entscheiden, in welche Richtung das Rad fuhr, d.h. die Spuren sind für beide Richtungen gleich. Die Kurven, die die Spuren des Vorderrades und des Hinterrades wiedergeben, sind die Begrenzung und die Einhüllende der Wasserlinie des schwimmenden Körpers im Gleichgewicht.

Die folgenden hier nicht wiedergegebenen Abschnitte bringen einige ergänzende Details.

2 Historischer Überblick

In diesem Papier betrachten wir eine Klasse ebener Kurven, die in überraschend vielen verschiedenen physikalischen und mathematischen Problemen auftreten. Diese Kurven sind nicht allgemein bekannt, da sie durch elliptischen Funktionen dargestellt werden, obwohl spezielle Fälle durch elementarere Funktionen ausgedrückt werden.

2.1 Die Kurven

Diese Kurven treten in zwei Varianten auf; in der linearen Form genügen sie in kartesischen Koordinaten $(x, y = y(x))$, $y' = dy/dx$ der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = ay^2 + b, \quad (1)$$

Die zirkulare Form wird in Polarkoordinaten (r, ϕ) durch

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = ar^2 + b + \frac{c}{r^2}, \quad (2)$$

beschrieben mit $r = r(\phi)$ und $r' = dr/d\phi$. Gleichung (1) gibt die Krümmung κ ,

$$\frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \kappa = 2ay. \quad (3)$$

Aus (2) erhalten wir die Krümmung

$$\frac{1}{rr'} \frac{d}{d\phi} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \kappa = 4ar^2 + 2b. \quad (4)$$

Wir drücken die Polarkoordinaten durch kartesische Koordinaten aus und verschieben y um r_0 ,

$$r \cos \phi = r_0 + y, \quad r \sin \phi = x. \quad (5)$$

Dann lautet (4)

$$\kappa = 4ar_0^2 + 8ar_0y + 4a(x^2 + y^2) + b. \quad (6)$$

Wenn wir nun

$$b = -2ar_0^2, \quad a = \tilde{a}/(4r_0), \quad (7)$$

wählen und den Limes $r_0 \rightarrow \infty$ durchführen, dann lautet Gleichung (6)

$$\kappa = 2\tilde{a}y, \quad (8)$$

welches die lineare Form (3) ist. Daher ist die lineare Form ein Grenzfall der zirkularen Form, wobei der Radius r_0 gegen unendlich geht.

Die Gleichung der Kurven kann koordinaten-unabhängig formuliert werden,

$$2\kappa'' + \kappa^3 - \mu\kappa - \sigma = 0, \quad (9)$$

wobei der Strich nun die Ableitung bezüglich der Bogenlänge angibt. Multiplikation mit κ' erlaubt die Integration,

$$\kappa'^2 + \frac{\kappa^4}{4} - \mu \frac{\kappa^2}{2} - \sigma\kappa = 2E. \quad (10)$$

Der Koeffizient σ verschwindet im linearen Fall. Die Herleitung wird offensichtlich, wenn wir die physikalischen und/oder mathematischen Probleme formulieren, die durch die Kurven gelöst werden. Aber die Beziehung zwischen den Gleichungen (1, 2) und Gleichungen (9, 10) kann auch direkt gegeben werden.[7]

2.2 Lineare Elastica

Die linearen Kurven finden sich in den *Elastica*. Die Frage ist: Wie biegt sich ein elastischer Draht (oder Stab) gegebener Länge? Er kann an beiden Enden befestigt sein und die Richtungen des Drahtes an beiden Enden ist gegeben, oder er ist an einem Ende befestigt und am anderen Ende beladen. Die Verbiegung unter Belastung wurde schon im 13. Jahrhundert von Jordanus de Nemore betrachtet, um 1493 von Leonardo da Vinci[3], 1638 von Galileo Galilei, und 1673 von Ignace-Gaston Pardies.[37, 53] Allerdings erhielten sie keine korrekten

Ergebnisse.[37, 52] Jakob (James) Bernoulli, der Hookes Ideen folgte, erhielt eine korrekte Differentialgleichung unter der Annahme, dass die Krümmung dem Drehmoment proportional sei, und löste sie teilweise 1691-1692.[4],

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{a^4 - x^4}}. \quad (11)$$

Huygens[31] argumentierte 1694, dass das Problem eine größere Vielfalt von Lösungen habe und skizzierte mehrere. Die allgemeinere Differentialgleichung gab Bernoulli[5] 1694-1695 an,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \pm ab}{\sqrt{a^4 - (x^2 \pm ab)^2}}, \quad (12)$$

Diese Gleichung gibt

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \frac{x^2 \pm ab}{a^2}, \quad (13)$$

welches Gleichung (1) mit x und y ausgetauscht und einer anderen Notation für die Konstanten ist. Jakob Bernoulli stellte auch fest "... unter allen Kurven gegebener Länge, die von einer geraden Linie begrenzt sind, ist die elastische Kurve diejenige, für die der Schwerpunkt der eingeschlossenen Fläche von der Linie am weitesten entfernt ist, so wie die Kettenlinie diejenige ist, deren Schwerpunkt am weitesten entfernt ist ..." [5]. So fand er, dass der Querschnitt eines Wasservolumens in einem Tuch unterhalb der Wasseroberfläche von der elastischen Kurve begrenzt ist.

1742 schlug Daniel Bernoulli (Neffe von Jakob) in einem Brief an Leonhard Euler vor, dass die potentielle Energie eines gebogenen Stabes proportional dem Integral des Quadrats der Krümmung κ integriert über die Bogenlänge s des Stabes $\int ds \kappa^2$ sei. In einer Arbeit von 1744 verwendete Euler[14] Variations-Techniken, das Problem zu lösen. Er fand Gleichung (12), klassifizierte die Lösungen, diskutierte die Stabilität, und bemerkte, dass die Krümmung proportional zu x ist,

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2x}{a^2}. \quad (14)$$

Diese Eigenschaft spielt bei mindestens zwei anderen physikalischen Phänomenen eine Rolle:

1807 untersuchte Pierre Simon Laplace[36] die Form von Kapillaren. Die Oberfläche einer Flüssigkeit eingeschlossen zwischen zwei parallelen senkrechten Platten genügt auch Gleichung (14), da die Differenz des Drucks innerhalb und außerhalb der Flüssigkeit proportional zur Krümmung der Oberfläche ist.

Ladungen in einem linear anwachsenden magnetischen Feld bewegen sich auf Grund der Lorentzkraft auf Trajektorien mit einer Krümmung proportional zum magnetischen Feld und daher auch auf Trajektorien gegeben durch elastische Kurven. Ohne dieser Äquivalenz gewahr zu sein, diskutierten sie Evers, Mirlin, Polyakov und Wölffe in ihrer Arbeit über die halbklassische Theorie des Transports in einem Zufalls-Magnetfeld.[15]

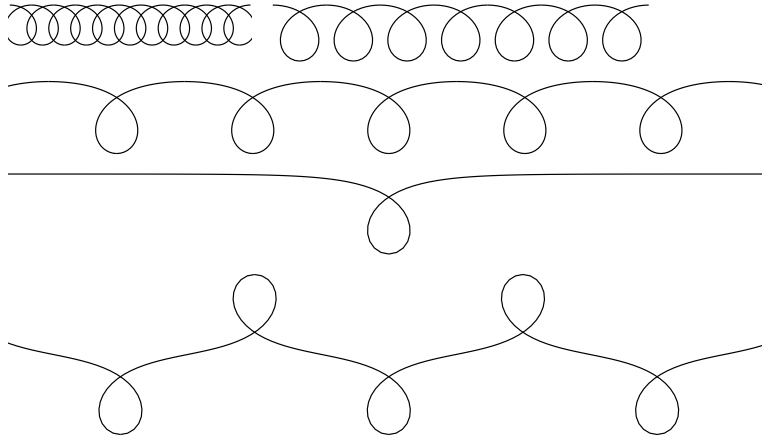


Abbildung 1: Beispiele linearer elastischer Kurven I

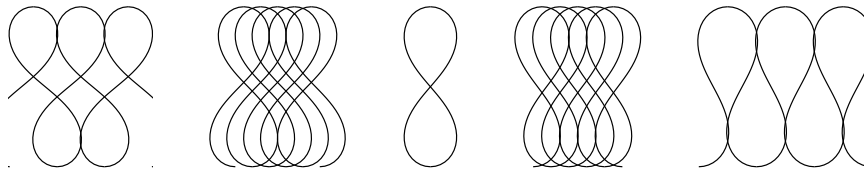


Abbildung 2: Beispiele linearer elastischer Kurven II

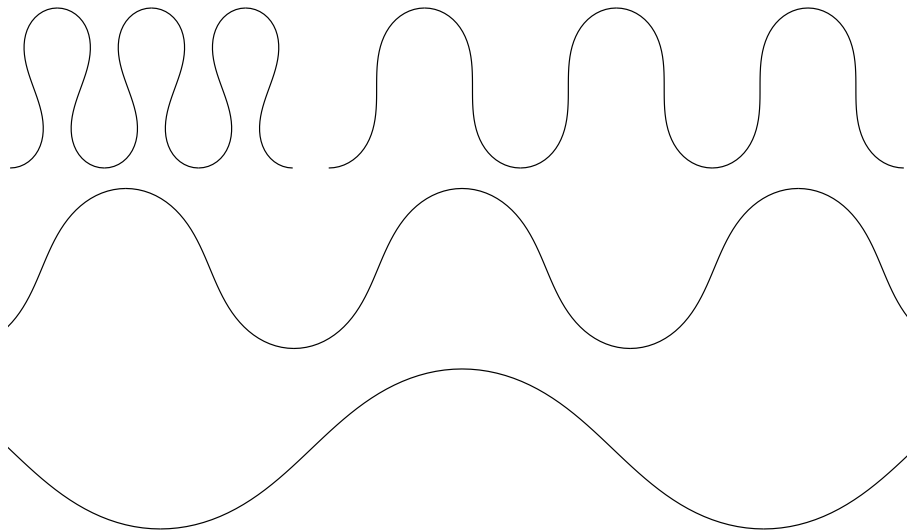


Abbildung 3: Beispiele linearer elastischer Kurven III

1859 führte Kirchhoff[33] ein kinetisches Analogon ein, indem er zeigte, dass das Problem der elastischen Kurven mit der Bewegung eines Pendels verknüpft ist. Es sei

$$\dot{x} = \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta, \quad (15)$$

wobei der Punkt die Ableitung bezüglich der Bogenlänge s angibt. Dann erhält man

$$\dot{\theta} = \kappa, \quad y' = \tan \theta. \quad (16)$$

Unter Verwendung von Gleichungen (3) und (1) erhält man

$$\dot{\theta}^2 = 4a^2 y^2 = 4a(\cos \theta - b). \quad (17)$$

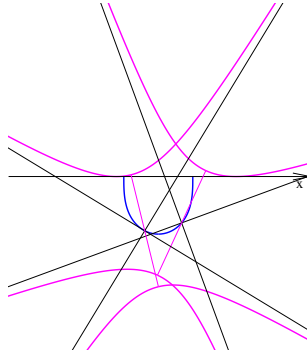
Multiplikation mit $mr^2/2$ (mit m für die Masse und r für die Länge des Pendels) und einer entsprechenden Wahl der Konstanten a und b , ergibt

$$\frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 - mgr \cos \theta = E. \quad (18)$$

Dies ist die Energie eines Pendels, wenn wir die Zeit t für den Bogen s in der Ableitung substituieren. Daher ist $\theta(t)$ die Zeitabhängigkeit des Winkels des Pendels gegen seine tiefste Lage. Die periodische Bewegung ist offensichtlich. Angenommen a ist positiv. Dann schwingt das Pendel für $-1 < b < 1$ in einem endlichen Intervall $-\theta_0 \leq \theta \leq +\theta_0$. Dies sind die schwingenden (inflectional) Lösungen. Wenn $b < -1$ ist, dann bewegt sich das Pendel über den höchsten Punkt $\theta = \pi$ (Überschlag). Dies sind dann die umlaufenden (non-inflectional) Lösungen. Der Grenzfall $b = -1$ führt auf die aperiodische Lösung (unendliche Periode).

Einige Beispiele elastischer Kurven werden in den Abbildungen 1 bis 3 gezeigt. Die ersten beiden Reihen der Abb. 1 zeigen Kurven, bei denen sich das Pendel über den höchsten Punkt bewegt. Die dritte Reihe zeigt den aperiodischen Grenzfall $b = -1$. Die Kurve wird *Syntractrix von Poloni* genannt (1729). Die letzte Reihe der Abb. 1 und die Abbildungen 2 und 3 zeigen die schwingenden periodischen Lösungen, die den höchsten Punkt nicht erreichen. Dies ergibt eine große Vielfalt von Formen einschließlich der *Acht* in der Mitte von Abbildung 2, *Lemnoid* genannt. Die zweite Figur in Abb. 3 entspricht dem Fall, in dem sich das Pendel bis zur horizontalen Lage bewegt. Dies ist die *rechteckige elastische Kurve*. Das Pendel schwingt unterhalb der horizontalen Position in den letzten zwei Reihen der Abbildung 3. In allen Fällen zeigen die Kurven Gleichgewichtslagen des elastischen Drahts. Allerdings entsprechen nur hinreichend kleine Kurvenstücke einem stabilen Gleichgewicht oder sogar dem absoluten Minimum der potentiellen Energie.

Rechteckige Elastica als Roulette von Hyperbeln The rechteckige elastische Kurve ist der Ort des Zentrums einer rechteckigen Hyperbel, die ohne abzurutschen auf einer Geraden abrollt. Der obere Zweig der Hyperbel wird in Figur 4 in zwei verschiedenen Orientierungen gezeigt. Der Mittelpunkt zwischen den Zweigen liegt auf der blauen rechteckigen Linteria. (Sturm 1841, see [16], Greenhill 1892 [23]).



Die Hyperbeln werden in magenta gezeigt, ihre Asymptoten in schwarz. Die Vertizes der beiden Zweige sind durch eine magenta Linie verbunden.

Abbildung 4: Rechteckige Elastica als Roulette von Hyperbeln

Ein exzellenter Überblick über die Geschichte der Elastica mit vielen Figuren gibt Raph Levién.[37] Auch Todhunter[52] und Truesdell[53, 54] geben Überblicksartikel der Geschichte der Elastizität. Viele Einzelheiten findet man in der Abhandlung von Love[39] über die Mathematische Theorie der Elastizität. In seiner Doktorarbeit[8] (1906) untersuchte Max Born elastische Drähte in der Ebene und auch in drei Dimensionen theoretisch und experimentell. Die Lösung von Gleichung (1) oder äquivalent von Gleichungen (11, 12) wurde von Saalschütz[44] 1880 mittels elliptischer Funktionen gegeben. Die elliptischen Funktionen wurden von Abel und Jacobi vor allem in den Jahren 1826 bis 1829 in mehreren Artikeln in Crelles Journal entwickelt.[12]. Abel starb 1829, Jacobi veröffentlichte sein grundlegendes Werk im gleichen Jahr.[32] Die expliziten Lösungen werden hier nicht angegeben. Sie können z.B. in Abschnitt 263 von [39], in Abschnitt 13 von [37] und in Ref. [60, 61] gefunden werden. Ingenieure bezeichnen mit der 'Bernoulli-Euler Balken-Theorie' oft Näherungen, in denen der Balken nur schwach gebogen ist.[62]

2.3 Elastica unter Druck (eingedellte Ringe)

Bis jetzt betrachteten wir Elastica, auf die nur an den Enden Kräfte wirkten. Ein allgemeineres Problem betrachtet elastische Drähte, auf die Kräfte entlang des Bogens wirken. Maurice Lévy beobachtete 1884[38], dass sich in dem Fall, in dem eine konstante Kraft P pro Bogenlänge senkrecht auf den Draht wirkt, die Differentialgleichung (2) ergibt. Er zeigte, dass dieses Problem mittels elliptischer Funktionen gelöst werden kann und fand zwei Arten von Lösungen. Sie werden eingedellte Ringe genannt, wenn der Draht geschlossen ist. Die Einschränkungen sind äquivalent denen, bei denen der Umfang und die Fläche innerhalb des Ringes gegeben sind. Halphen arbeitete die Ergebnisse im selben Jahr im Detail aus[27] und führte sie in seinem 'Traité des fonctions elliptic et de leurs applications'[28] aus. Einige Elastica unter Druck werden in Abbildung 5 gezeigt. Ihre Symmetrie ist durch die Dieder-Gruppen D_p mit $p = 2, 3, 3$ in der ersten Reihe, $p = 4, 4, 5, 5$ in der zweiten Reihe und $p = 5, 5, 6$ in der dritten

Reihe gegeben. Alle sind Lösungen der Gleichung (2). Während jene in der ersten und zweiten Reihe als deformierte Kreise angesehen werden können, zeigen jene in der dritten Reihe Doppelpunkte. Ähnlich wie für dieastica zeigen die Kurven Gleichgewichts-Konfigurationen. Aber oft sind nur kleine Stücke davon im stabilen Gleichgewicht.

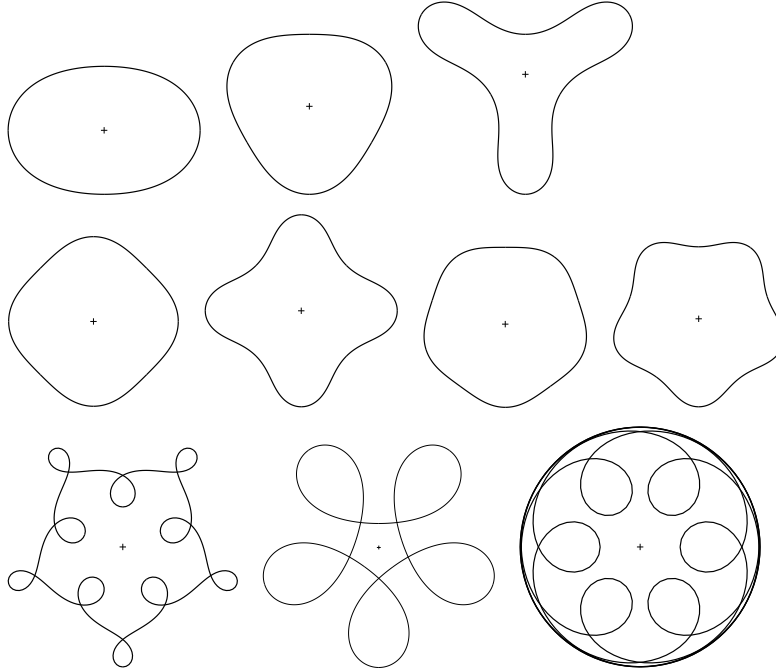


Abbildung 5: Beispiele von Elastica unter Druck (eingedellte Ringe)

Greenhill[24] betrachtete 1899 dasselbe Problem und suchte besonders Kurven, die durch pseudo-elliptische Funktionen ausgedrückt werden. Daher sind einige Lösungen algebraische Kurven. Das einfachste Beispiel außer dem Kreis ist gegeben durch

$$r^3 = a^3 \cos(3\phi) \quad (19)$$

in Polarkoordinaten (r, ϕ) mit der Krümmung

$$\kappa = 4r^2/a^3. \quad (20)$$

In kartesischen Koordinaten (x, y) hat es die Form

$$(x^2 + y^2)^3 = a^3 x(x^2 - 3y^2). \quad (21)$$

Diese Kiepert-Kurve (W. Roberts und L. Kiepert 1870, siehe [16]) sieht wie ein Kleeblatt aus und wird in Abb. 6 gezeigt.

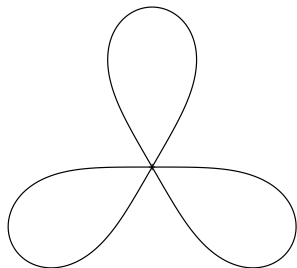


Abbildung 6: Kiepert-Kurve $r^3 = a^3 \cos(3\phi)$

Flächenbeschränkte ebene Elastica in der Biophysik

Biologische Zellen haben gewöhnlich konstantes Volumen und konstante Oberfläche. Ihre Form ist in erheblichem Umfang durch das Minimum der Membranenergie bestimmt, siehe z.B. Helfrich[29] and Svetina and Zeks[49]. Das zwei-dimensionale Analogon wurde von Arreaga, Capovilla et al.[1, 11] und von Goldin et al.[22] betrachtet. Da Druck und Fläche konjugierte Größen sind, sind die Formen durch die der Elastica unter Druck gegeben. Jetzt sind natürlich konstante Fläche und konstante Länge der begrenzenden Kurve gegeben. Die Autoren beziehen sich zur Bestimmung der Form auf die Lagrange Gleichungen (9, 10) wie sie von Langer und Singer für Elastica[35] und für eingedellte Ringe [34] angegeben wurden, siehe auch die Referenzen [7, 47]. Die Gleichungen für die Elastica unter Druck kann man auch durch Betrachten der Kräfte und Momente in den Stäben erhalten.[51] Die Lösung der Gleichung (2) für eingedellte Ringe mittels elliptischer Funktionen kann man in [38, 27, 28, 24] und in [60, 61] nachlesen. Referenz [61] enthält weitere Figuren.

2.4 Schwimmende Körper im Gleichgewicht

2.4.1 Ulam's Problem in zwei Dimensionen

Die in den vorhergehenden Unterabschnitten erwähnten Kurven treten in zwei anderen Problemen auf, dem Problem der *Schwimmenden Körper im Gleichgewicht* und dem *Radspurproblem*. Das erste dieser Probleme geht auf Problem 19 von Ulam[55] im Schottischen Buch zurück: "Ist ein Festkörper konstanter Dichte, der in Wasser in jeder Orientierung schwimmt, eine Kugel?" Die zwei-dimensionale Version dieses Problems bezieht sich auf einen zylinderförmigen Klotz konstanter Dichte ρ , der im Wasser in jeder Orientierung mit seiner Achse parallel zur Wasseroberfläche im Gleichgewicht schwimmt. Gesucht ist ein Querschnitt senkrecht zur Achse, der vom Kreis verschieden ist.

Die Dichte des Klotzes sei ρ (genauer gesagt, ρ ist das Verhältnis der Dichte des Klotzes zu der der Flüssigkeit). Die Fläche des Querschnitts sei A , die des Teils oberhalb und unterhalb der Wasserlinie seien A_1 and A_2 . Dann verlangt das Gesetz des Archimedes

$$A_1 = (1 - \rho)A, \quad A_2 = \rho A. \quad (22)$$

Der Abstand des Schwerpunktes des Querschnitts oberhalb der Wasserlinie sei h_1 , der unterhalb der Wasserlinie h_2 , die Länge des Klotzes sei L . Dann ist die potentielle Energie

$$\rho(1 - \rho)ALg(h_1 + h_2). \quad (23)$$

Daher ist $h_1 + h_2$ konstant. Die Linie, die die zwei Schwerpunkte miteinander verbindet, muss senkrecht zur Wasserlinie liegen. Drehung um einen infinitesimalen Winkel ergibt, dass die Länge der Wasserlinie $2l$ der Beziehung

$$\frac{2}{3}l^3 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) = h_1 + h_2 \quad (24)$$

genügt. Daher hängt die Länge der Wasserlinie nicht von der Orientierung des Klotzes ab. Die Bedingung, dass die Fläche unterhalb der Wasserlinie und die Länge der Wasserlinie konstant sind, impliziert, dass der Anteil des Umfangs unterhalb der Wasserlinie konstant ist. Sie impliziert auch, dass die Einhüllende der Wasserlinien durch die Mittelpunkte der Wasserlinien gegeben ist.

Dieses zwei-dimensionale Problem hat viele Mathematiker angezogen.

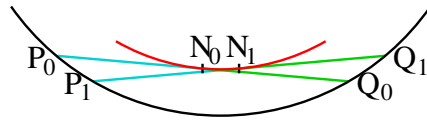


Abbildung 7: Unterer Teil der Begrenzung (schwarz) des schwimmenden Körpers

Die Wasserlinien P_0Q_0 und P_1Q_1 sind blau und cyan. Die Mittelpunkte N_0 und N_1 liegen auf der Einhüllenden (rot) der Wasserlinien.

2.4.2 Dichte $\rho = 1/2$

Es gibt eine große Klasse von Lösungen für $\rho = 1/2$. Die Lösungen beziehen sich nicht auf die Elastica, aber es ist es Wert, sie zu erwähnen. Grundsätzlich wurden diese Lösungen von Zindler[63] gefunden, obwohl er dieses physikalische Problem nicht betrachtete, aber er fand konvexe Flächen mit der Eigenschaft, dass Sehnen zwischen zwei Punkten auf der Begrenzung, die den Umfang halbieren, konstante Länge $2l$ haben und gleichzeitig die Fläche halbieren. Sie können parametrisiert werden durch

$$x(\alpha) = l \cos(\alpha) + \xi(\alpha), \quad y(\alpha) = l \sin(\alpha) + \eta(\alpha), \quad (25)$$

$$\xi(\alpha) = \int^\alpha d\beta \cos(\beta) \hat{\rho}(\beta), \quad \eta(\alpha) = \int^\alpha d\beta \sin(\beta) \hat{\rho}(\beta), \quad (26)$$

mit Parameter α . ξ und η müssen den Beziehungen

$$\xi(\alpha + \pi) = \xi(\alpha), \quad \eta(\alpha + \pi) = \eta(\alpha). \quad (27)$$

genügen. (ξ, η) sind die Koordinaten der Einhüllenden der Wasserlinien, und $|\hat{\rho}(\alpha)|$ ist die Krümmung der Einhüllenden. Diese hat typischerweise eine ungerade Anzahl von Spitzen.

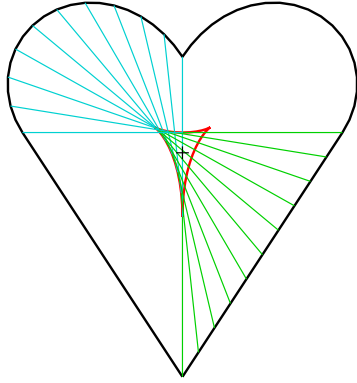


Abbildung 8: Herzförmige Zindler Kurve, siehe Auerbach[2]

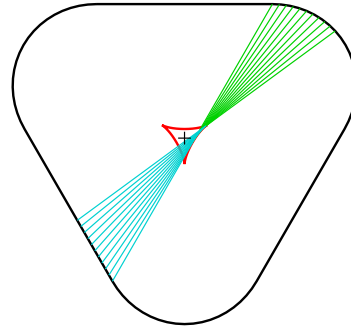


Abbildung 9: Zindler Kurve, siehe Auerbach[2]

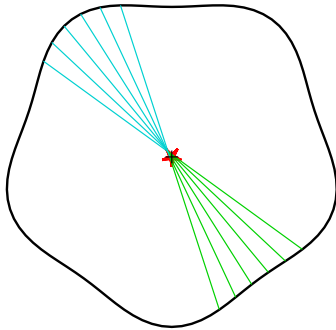


Abbildung 10: Zindler Kurve, fünffache Symmetrie

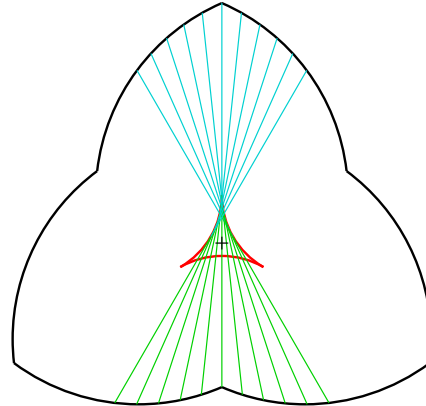


Abbildung 11: Zindler Kurve, siehe Salgaller und Kosteljanetz[45], ähnlich bei Zindler[63]

Die Bedingung (27) impliziert $\hat{\rho}(\beta + \pi) = -\hat{\rho}(\beta)$. Die Sehnen laufen von $(x(\alpha), y(\alpha))$ nach $(x(\alpha + \pi), y(\alpha + \pi))$. Zindler betrachtete nicht die Schwerpunkte der beiden Flächenhälften. Sonst hätte er bemerkt, dass ihr Abstand nicht vom Winkel α abhängt und die Strecke zwischen ihnen immer senkrecht auf

der Sehne steht. Diese Klasse von Kurven wurde auch von Auerbach[2] 1938 und von Geppert[19] 1940 gefunden. Spezielle Fälle wurden von Salkowski[46] 1934 und von Salgaller und Kostelianetz[45] 1939 angegeben. Beispiele von Zindler-Kurven werden in den Abbildungen 8 bis 11 gezeigt. Sie gehen auf Auerbach[2], Zindler[63], und Salgaller und Kostelianetz[45] zurück. Die Einhüllenden der Wasserlinien werden in rot, die Wasserlinien in blau und cyan gezeigt.

2.4.3 Dichte $\rho \neq 1/2$

Lange Zeit war nicht klar, ob es Lösungen für $\rho \neq 1/2$ gibt. Gilbert[21] behauptet in seinem sehr lesenswerten Artikel 'How things float' ('Wie Dinge schwimmen') in Abschnitt 3 '*Different heart-shaped cross sections work for other densities (he means densities different from 1/2) and there are other solutions that are not heart-shaped.*' 'Verschiedene herzförmige Querschnitte gibt es für andere Dichten (er meint Dichten verschieden von 1/2) und es gibt andere Lösungen, die nicht herzförmig sind.' In der Tat, es gibt Querschnitte, die nicht herzförmig sind für Dichte 1/2 und Dichten verschieden von 1/2. Aber ich kenne keine herzförmige Lösung für eine Dichte verschieden von 1/2 und ich bezweifle, dass zu der Zeit, zu der er das Papier schrieb, eine Lösung für eine Dichte verschieden von 1/2 bekannt war. Zumindest gibt er keine Referenz für solch eine Lösung an.

Versuche durch Salkowski[46] 1934, Gericke[20] 1936 und Ruban[43] 1939 Lösungen für $\rho \neq 1/2$ zu finden, scheiterten. Wie ich später erklären werde, scheint es, dass Ruban einer Lösung nahe war. Mehrere Autoren haben bewiesen, dass Sehnen, die ein Dreieck oder Viereck bilden, nur auf Kreise führen.

Bracho, Montejano und Oliveros[9, 10, 41] waren wahrscheinlich die ersten, die Lösungen für Dichten verschieden von 1/2 fanden. Sie betrachteten ein Karussell, welches ein dynamisches gleichseitiges Fünfeck ist, dessen Seitenmittelpunkte sich parallel zur Seite bewegen. Die Spur der Ecken beschreiben die Begrenzung und die Mittelpunkte die Einhüllende der Wasserlinie. Auf diese Weise fanden sie Lösungen, deren Sehnen gleichseitige Fünfecke bilden. Jedoch waren diese Lösungen nicht hinreichend konvex, da die Wasserlinien in einigen Positionen den Querschnitt mehrfach schnitten.

Für spezielle Dichten ρ kann man den kreisförmigen Querschnitt in einen mit p -facher Symmetrieachse und Spiegelsymmetrie deformieren

$$r(\phi) = r_0(1 + 2\epsilon \cos(p\phi) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cos(pn\phi)), \quad (28)$$

wobei die Koeffizienten c_n Funktionen von ϵ und p mit $c_n = O(\epsilon^n)$ sind. Die entsprechenden $p - 2$ Dichten hängen von ϵ ab. Überraschenderweise ergab die Störungsentwicklung in ϵ (bis zur berechneten Ordnung ϵ^7) ein und dieselbe Lösung für alle $p - 2$ Dichten, obwohl dies nur für Paare von Dichten ρ und $1 - \rho$ zu erwarten war. Der gegenwärtige Autor berichtete dieses Ergebnis in [58]. Es war unerwartet. Wahrscheinlich galt es in allen Ordnungen in ϵ und verdiente daher weitere Untersuchung. (In Gleichung (83) von [58]v3 ist c_{δ_0} durch s_{δ_0} zu ersetzen.)

In einem ersten Schritt wurde der Grenzfall $p \rightarrow \infty$ mit $r_0 \propto p$ und $\epsilon \propto 1/p$ betrachtet. Dies entspricht dem im Unterabschnitt 2.1 erwähnten Übergang vom zirkularen Fall zum linearen Fall. In diesem Grenzfall tragen nur die Terme $\sum_{n,k} c_{n,k} p^{n+2k-1} \epsilon^{n+2k} \cos(pn\phi)$ in der Entwicklung (28) (mit ungeradem n) bei.

Eigenschaft der konstanten Entfernung Diese Kurven haben eine bemerkenswerte Eigenschaft, die ich die Eigenschaft der konstanten Entfernung nenne:

Betrachte zwei Kopien der Kurven. Wähle einen beliebigen Punkt auf jeder Kurve. Dann existiert im linearen Fall immer eine Länge δu , um den die Kurven gegeneinander verschoben werden können, und im zirkularen Fall ein Winkel $\delta\phi$, um den die zwei Kurven gegeneinander gedreht werden können, so dass der Abstand $2l$ zwischen den beiden Punkten konstant bleibt, wenn sie auf den beiden Kurven um die gleiche Bogenlänge s weiterbewegt werden.

Betrachtet man dieses Verfahren umgekehrt, so kann man die Kurven im linearen Fall kontinuierlich gegeneinander verschieben und beobachten wie die Entfernung $2l$ mit δu anwächst, oder wir können die Kurven im zirkularen Fall gegeneinander drehen und beobachten, wie $2l$ mit $\delta\phi$ variiert. Wenn $\delta\phi$ um $2\pi/p$ erhöht ist, dann fallen beide Kurven aufeinander, und eine Lösung für den schwimmenden Körper ist gefunden, vorausgesetzt die Kurve ist hinreichend konvex, so dass die Sehne zwischen den beiden Punkten die Kurve nicht an einem anderen Punkt schneidet.

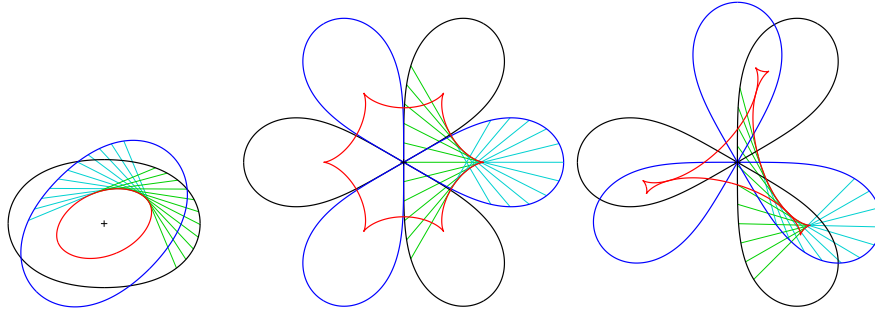


Abbildung 12: Eigenschaft der konstanten Entfernung

Die erste Figur der Abb. 5 und die Figur aus Abb. 6 werden in zwei Kopien um einen Winkel 45° , 60° und 30° gegeneinander verdreht gezeigt.

In der Abb. 12 werden drei Beispiele für die Eigenschaft der konstanten Entfernung gezeigt. Zwei Kopien der ersten Figur aus Abb. 5 werden in schwarz und blau gezeigt. Die Linien konstanter Entfernung $2l$ sind in cyan und grün gezeichnet, wobei die Farbe in der Mitte wechselt, wo sie die rote Einhüllende berühren. Ähnlich werden die Linien für Kopien des Kleeblatts, Abb. 6 gezeigt, die um $\delta\phi = 60^\circ$ bzw. $\delta\phi = 30^\circ$ gedreht sind. Die Länge $2l$ für das Kleeblatt beträgt $2l = a |\sin(3\delta\phi/2)|^{1/3}$.

Der Abstand $2l$ schrumpft für den eingedellten Ring (erste Figur der Abb. 12) nach Rotation um $2\pi/p = 180^\circ$ auf null. Daher kann sie nicht als schwim-

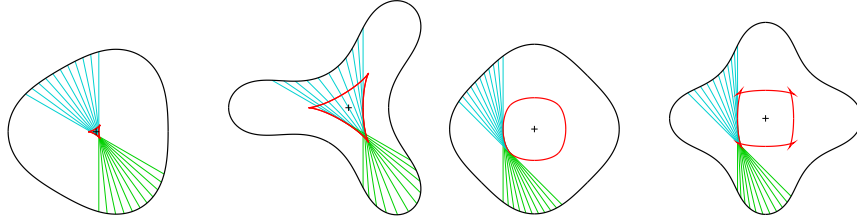


Abbildung 13: Schwimmende Körper im Gleichgewicht, $p = 3$ und $p = 4$

mender Körper im Gleichgewicht dienen. Die eingedellten Ringe in Abb. 13 der Symmetrie D_3 und D_4 und jene in Abb. 14 der Symmetrie D_5 sind Begrenzungen schwimmender Körper im Gleichgewicht. Rotation um $2\pi/p$ ergibt einen nicht verschwindenden Abstand $2l$. Die Wasserlinien werden in grün und cyan gezeigt, die Einhüllende der Wasserlinien in rot. Die Figuren mit ungeradem p sind auch Lösungen für $\rho = 1/2$, daher spezielle Zindler Kurven. Die Figuren mit $p = 5$ sind außer Lösungen für $\rho = 1/2$ auch Lösungen für eine Dichte $\rho > 1/2$ und für eine Dichte $\rho < 1/2$.

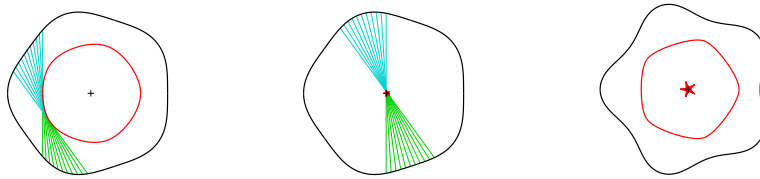


Abbildung 14: Schwimmende Körper im Gleichgewicht, $p = 5$

Wir wenden uns dem linearen Fall mit Beispielen in Abb. 15 zu. In der ersten bis dritten Reihe sind Figuren der zweiten bis vierten Reihe der Abb. 1 dargestellt. Sie sind um eine Entfernung δu verschoben und in einem Fall ist eine Kurve gespiegelt. Die gespiegelte Kurve ist Lösung der Gleichung (1) mit denselben Konstanten a und b . In der vierten und fünften Reihe werden zwei Beispiele gezeigt, in dem die Figuren so weit verschoben wurden, dass sie wieder deckungsgleich sind, zusammen mit den Linien der Länge $2l$ und den Einhüllenden.

Die Herleitung der Differentialgleichungen (1, 2) für die Kurven finden sich in [57] auf der Grundlage von [58, 59]. Zunächst wurde der lineare Fall behandelt, wobei zuerst große Entfernungen, dann infinitesimale und schließlich beliebige Entfernungen betrachtet wurden. (Abschnitt 2 von [59]). Dies ergab Gl. (1) (Gl. (17) in [59] und Gl. (27) in [57]). Gleichung (2) für den zirkularen Fall wurde in Abschnitt 3 von [59] und in Abschnitt 3.2 von [57] hergeleitet. Bei der Herleitung dieser Gleichung nahm der Autor an, dass auch für nicht ganzzahlige Periodizität p solche Sehnen (von infinitesimaler Länge) zwischen Kurven existieren, die um fast 2π gegeneinander rotiert sind. Diese Annahme ergibt eine Differentialgleichung dritter Ordnung, (43) in [59] und (33) in [57].

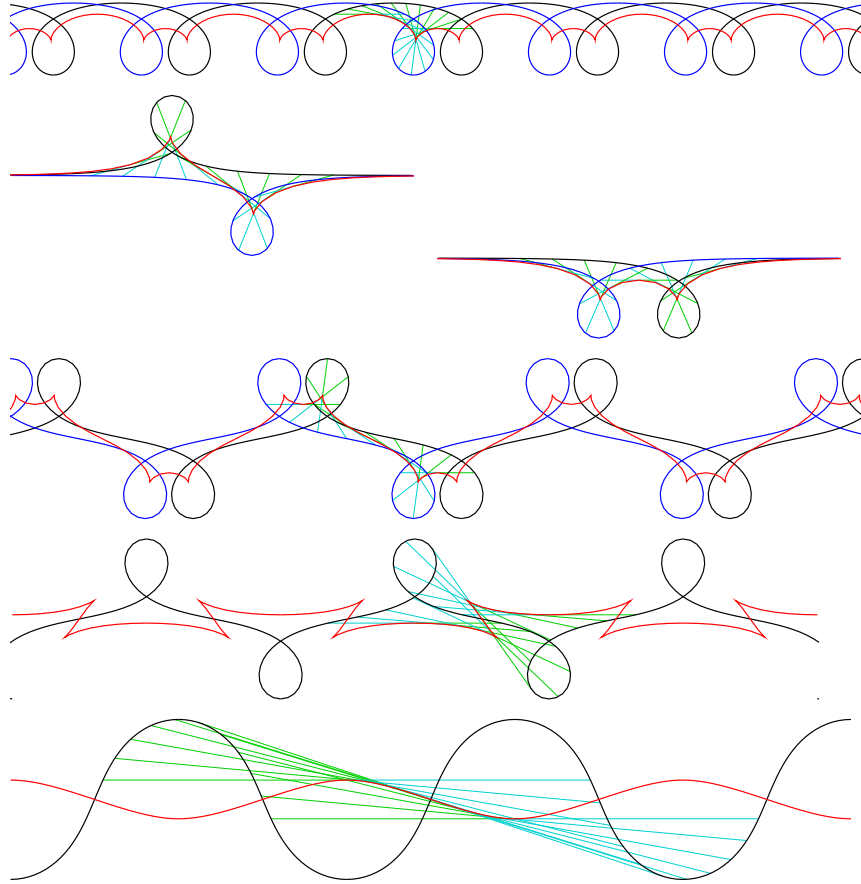


Abbildung 15: Eigenschaft der konstanten Entfernung für den linearen Fall

Sie kann leicht zur Gl. (2) (Gl. (47) in [59] und Gl. (37) in [57]) aufintegriert werden. Die explizite Lösung dieser Gleichungen zeigt, dass die Eigenschaft des konstanten Abstands zutrifft.[60, 61]

Das Problem ist ursprünglich ein nicht lokales, da es Endpunkte der Sehnen im allgemeinen verbindet ohne die Notwendigkeit, dass sich diese zu einem Polygon schließen. Die Gleichungen (1, 2) reduzieren es jedoch auf ein lokales Problem: Die Gleichungen verknüpfen nur Ort und Richtung der Kurve am selben Punkt.

Es war für mich eine große Überraschung, als Bor, Levine, Perline und Tabachnikov[7] fanden, dass das Problem der Elastica unter Druck und das Problem der schwimmenden Körper im Gleichgewicht in zwei Dimensionen durch dieselbe Differentialgleichung (2) beschrieben wird und der lineare Fall den Elastica (ohne Druck) entspricht.

Ladungen in magnetischen Feldern Die Krümmung der Begrenzungskur-

ven ist im Radius r quadratisch, $\kappa = 4ar^2 + 2b$ gemäß Gl. (4). Daher bewegen sich Ladungen in einem senkrechten magnetischen Feld mit solch einer r -Abhängigkeit entlang dieser Kurven.

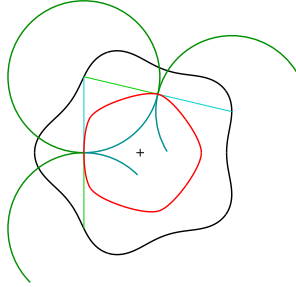


Abbildung 16: Magnetisches Billiard bei senkrechtem Einfall
Die rote Begrenzung ist durch die Einhüllende der Sehnen gegeben.

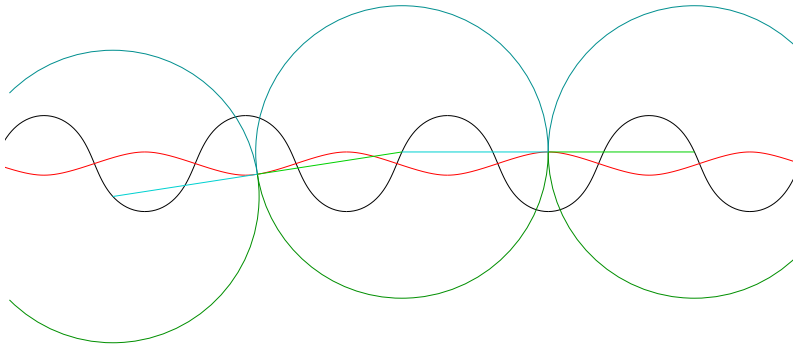


Abbildung 17: Magnetisches Billiard bei senkrechtem Einfall
Die rote Begrenzung ist durch die Einhüllende der Sehnen gegeben.

Ein anderes System ist ein dynamisches Billiard. Dort bewegt sich ein Teilchen abwechselnd frei und wird an der Begrenzung elastisch reflektiert (Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel). Kreise sind Begrenzungen mit der Eigenschaft, dass das Teilchen diese mit dem gleichen Winkel δ verlässt und wieder darauf auftrifft. Gutkin[25] fand Billiard-Begrenzungen mit dieser Eigenschaft, die sich von Kreisen unterscheiden.

In einem magnetischen Billiard ist das Teilchen geladen und einem konstanten senkrechten Magnetfeld unterworfen. Es bewegt sich daher nicht auf einer Geraden, sondern auf einem Larmor-Kreis vom Radius R gegeben durch seine Ladung, Masse, Geschwindigkeit und der Stärke des Feldes. Falls der Winkel δ mit der Billiard-Begrenzung ein rechter ist, dann haben Billiards begrenzt durch die (roten) Einhüllenden die δ -Gutkin Eigenschaft, falls der Radius gleich der halben Sehnenlänge ist, $R = l$. (Bialy, Mironov, and Shalom[6]). Diese Larmor-

Bogen können innerhalb (in dunkelblau) oder außerhalb (in dunkelgrün) der Begrenzung liegen, Figur 16. Solche Larmor-Bogen sind auch an den Einhüllenden der Sehnen der linearen Elastica möglich, siehe Figur 17.

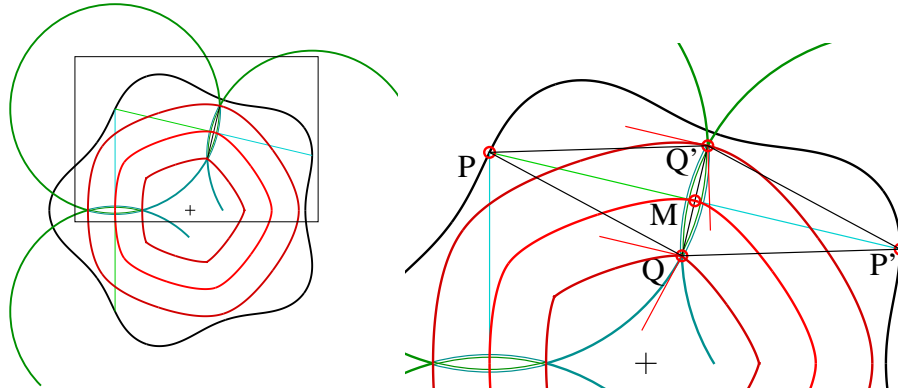


Abbildung 18: Magnetische Billiards für $\delta \neq 90^0$

Die dunkelroten parallelen Kurven sind die Begrenzungen der Billiards. Rechte Figur: Ein Ausschnitt.

Falls das Teilchen die Begrenzung nicht unter rechtem Winkel trifft, dann wird die Begrenzung durch eine Parallelkurve zur Einhüllenden beschrieben. Diese Parallelkurven werden in Figur 18 in dunkelrot gezeigt. Die Sehne PP' berührt die rote Einhüllende am Mittelpunkt M . Die Parallelkurven und die Larmorkreise gehen durch Q und Q' . Die Tangenten an diese Kurven bei Q und Q' sind durch rote Linien angezeigt. Der Winkel zwischen den Tangenten bei Q sei δ , und bei Q' ist δ' . Beide Winkel summieren sich zu 180^0 . Die Winkel in der Raute $PQ'P'Q'$ mit Mittelpunkt M genügen $\angle Q'PM = \angle QPM = \angle Q'P'M = \angle QP'M = 90^0 - \delta$. Es ist offensichtlich, dass der Radius der Loarmorbogen $l = R \sin \delta$ genügt, und der Abstand zwischen roter Einhüllender und der Begrenzung des Billiards $R \cos \delta$ beträgt.

Diese Konstruktion ist auf Winkel δ hinreichend nahe an 90^0 und hinreichend konvexen Einhüllende beschränkt.[6] Offensichtlich dürfen die Begrenzungen keine Doppelpunkte haben.

2.5 Das Radspurproblem

Das Radspurproblem ist eng mit dem Problem verknüpft, schwimmende Körper im Gleichgewicht zu finden. Es wurde von Finn[17, 18, 50] angesprochen. Das Problem geht auf eine Kritik an der Diskussion zwischen Sherlock Holmes und Watson *in den Abenteuern der Abteischule (The Adventure of the Priory School)*[13] zurück, in welche Richtung sich ein Fahrrad bewegte, dessen Radspuren beobachtet wurden. Der Abstand zwischen dem Vorder- und dem Hinterrad sei l . Die Endpunkte der Tangente der Länge l an die Spur des Hin-

terrades in Bewegungsrichtung des Fahrrades sind die Spuren des Vorderrades. Wenn daher die Tangentenlinien in beiden Richtungen an der Spur des Vorderades enden, dann ist es offen, in welche Richtung das Rad fuhr. Daher sind Kurven γ des Hinterrades (rot in Abb. 7) und Γ für das Vorderrad (schwarz in Abb. 7) Lösungen für solch eine nicht eindeutige Fahrtrichtung des Rades. Das Radspurproblem besteht im Auffinden solcher Kurven Γ und γ , die sich von der trivialen Lösung von Kreisen und Geraden unterscheiden.

Offensichtlich sind die Lösungen des zweidimensionalen Problems der schwimmenden Körper auch Lösungen des Radspurproblems, aber auch die linearen *Elastica* und die Zindler Kurven lösen das Problem. Es gibt mehr Lösungen für dieses Problem. Finn argumentiert, dass die Vielfalt der Radspurkurven viel größer ist: Man zeichne von einem Punkt (N_0) auf der Spur des Hinterrades die Tangente zum Vorderrad in beide Richtungen und gebe eine beliebige glatte Spur des Vorderrades zwischen diesen beiden Punkten (P_0) und (Q_0) in Abb. 7. Dann kann man die Radspurkurven in beiden Richtungen fortsetzen.[17, 18].

Wir erklären kurz, warum Zindler Kurven Radspurkurven sind. Der Radler fahre in eine Richtung so dass das Vorderrad bei $(x(\alpha), y(\alpha))$ ist, wie in Gl. (25) gegeben und mit dem Hinterrad bei $(\xi(\alpha), \eta(\alpha))$. Dann ist der Radler, der in Gegenrichtung fährt, mit seinem Vorderrad bei

$$x_-(\alpha) = -l \cos(\alpha) + \xi(\alpha), \quad y_-(\alpha) = -l \sin(\alpha) + \eta(\alpha). \quad (29)$$

Da $(x_-(\alpha), y_-(\alpha)) = (x(\alpha + \pi), y(\alpha + \pi))$ und die Spuren der Hinterräder gemäß (27) übereinstimmen, benützen beide Radler dieselben Spuren für ihre Räder und man kann nicht feststellen, in welche Richtung sie fuhren.

Zindler Kurven, aber auch eine Anzahl von Kurven der *Elastica* und eingedellter Ringe zeigen Einhüllende, d.h. Spuren von Hinterrädern mit Spitzen. Dann muss das Hinterrad vor und zurück fahren. Für diese Kurven muss sich das Vorderrad um mehr als einen rechten Winkel drehen. Das Fahren entlang solcher Spuren erfordert artistische Fertigkeiten und ein geeignetes Fahrrad. Außer den Zindler Kurven (Abb. 8 bis 11) trifft dies für den ersten, zweiten und vierten eingedellten Ring in Abb. 13, die innere Hinterspur der Abb. 14 und die elastische Kurve der vierten Reihe der Abb. 15 zu. Jedoch können die Spuren der dritten Figur in Abb. 13, die Spuren der ersten Figur und die äußeren Spuren der dritten Figur in Abb. 14, und die Spuren der fünften Reihe der Abb. 15 leicht durchfahren werden. Sie stellen gute Lösungen des Radspurproblems dar.

3 Zusammenfassung

In diesem Papier wurde ein kurzer historischer Überblick über die Kurven gegeben, die mit den zweidimensionalen Körpern, die in jeder Orientierung schwimmen, und dem Radspurproblem zusammenhängen. Bor, Levi, Perline und Tabachnikov fanden, dass eine ganze Anzahl der Begrenzungskurven bereits als *Elastica* und *Elastica unter Druck* oder *Eingedellte Ringe* bekannt waren. Auerbach hatte gefunden, dass von Zindler beschriebene Kurven Lösungen für das

Problem der Schwimmenden Körper im Gleichgewicht der Dichte $1/2$ darstellen. Eine noch größere Klasse von Kurven löst das Radspurproblem.

Die folgenden Abschnitte behandelten einige ergänzende Details: Mehrere Herleitungen der Gleichungen für die Elastica und Elastica unter Druck wurden gegeben. Die Eigenschaften der Zindler Kurven und einige Arbeiten anderer Mathematiker über das Problem der schwimmenden Körper wurde diskutiert. Spezielle Fälle der Elastica unter Druck führen auf algebraische Kurven wie Greenhill zeigte. Da die meisten der Kurven, die hier betrachtet wurden, Radspurkurven sind, fügten wir einige Bemerkungen über sie hinzu.

Danksagung Ich bin Sergei Tabachnikov für nützliche Hinweise und Diskussionen dankbar. J.A. Hanna und M. Bialy danke ich für nützliche Informationen.

Referenzen

- [0] Ich liste hier auch die Arbeiten auf, die im vollständigen englischen Text[I] enthalten sind.
- [1] F. Wegner, *From Elastica to floating bodies of equilibrium*, arXiv:1909.12596
- [1] G. Arreaga, R. Capovilla, C. Chryssomalakos, J. Guven, *Area-constrained planar elastica*, Phys. Rev. E 65 (2002) 031801
- [2] H. Auerbach, *Sur une probl'eme de M. Ulam concernant l'equilibre des corps flottants*. Studia Math. 7 (1938) 121-142
- [3] R. Balarini, *The Da Vinci-Euler-Bernoulli Beam Theory?* Mechanical Engineering Magazine Online (April 18, 2003)
- [4] J. Bernoulli, *Quadratura curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura*. In *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Birkhäuser
- [5] J. Bernoulli, *Jacobi Bernoulli, Basiliensis, Opera* vol. 1 (1744) Cramer & Philibert, Geneva
- [6] M. Bialy, A.E. Mironov, L. Shalom, *Magnetic billiards: Non-integrability for strong magnetic field; Gutkin type examples*, arXiv: 2001.02119v1
- [7] G. Bor, M. Levi, R. Perline, S. Tabachnikov, *Tire track geometry and integrable curve evolution*, arxiv 1705.06314
- [8] M. Born, *Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, unter verschiedenen Grenzbedingungen*, PhD Thesis. Universität Göttingen (1906) <https://archive.org/details/untersuchungenb00borngoog/page/n5>
- [9] J. Bracho, L. Montejano, D. Oliveros, *A classification theorem for Zindler Carousels*, J. Dynam. Control Systems 7 (2001) 367

- [10] J. Bracho, L. Montejano, D. Oliveros, *Zindler curves and the floating body problem*, Period. Math. Hungar 49 (2004) 9
- [11] R. Capovilla, C. Chryssomalakos, J. Guven, *Elastica hypoarealis*, Eur. Phys. J. B 29 (2002) 163-166
- [12] Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 1 (1826) – 4(1929)
- [13] A.C. Doyle, *The Adventure of the Priory School* in *The Return of Sherlock Holmes*, McClure, Philips & Co. (New York 1905), Georges Newnes, Ltd. (London 1905)
- [14] L. Euler, *Additamentum: De curvis elasticis* in Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausanne (1744); Translated and annotated by W.A. Oldfather, C.A. Ellis, and D.M. Brown *Leonhard Euler's elastic curves* Isis 20 (1933) 72-160, <http://www.jstor.org/stable/224885>; Übersetzt von H. Linsenbarth, in *Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 175 (Leipzig 1910)
- [15] F. Evers, A.D. Mirlin, D.G. Polyakov, P. Wölfle, *Semiclassical theory of transport in a random magnetic field*, Phys. Rev. B60 (1999) 8951; cond-mat/9901070
- [16] R. Ferréol, *Encyclopédie des formes mathématiques remarquables*, www.mathcurve.com
- [17] D.L. Finn, *Which way did you say that bicycle went?* <http://www.rose-hulman.edu/~finn/research/bicycle/tracks.html>
- [18] D.L. Finn, *Which way did you say that bicycle went?* Math. Mag. 77 (2004) 357-367
- [19] H. Geppert, *Über einige Kennzeichnungen des Kreises*, Math. Z. 46 (1940) 117-128
- [20] H. Gericke, *Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises*, Math. Z. 40 (1936) 417
- [21] E.N. Gilbert, *How Things Float*, Am. Math. Monthly 98 (1991) 201
- [22] I. Goldin, J-M. Delosme, A.M. Bruckstein, *Vesicles and Amoebae: On Globally Constrained Shape Deformation*, J. Math. Imaging and Vision 37 (2010) 112
- [23] A.G. Greenhill, *The applications of elliptic functions*, MacMillan & Co, London, New York (1892)

- [24] A.G. Greenhill, The elastic curve, under uniform normal pressure, *Mathematische Annalen* LII (1899) 465
- [25] E. Gutkin, *Capillary Floating and the Billiard Ball Problem*, *J. Math. Fluid Mech.* 14 (2012) 363-382
- [26] E. Gutkin, *Addendum to: Capillary Floating and the Billiard Ball Problem*, *J. Math. Fluid Mech.* 15 (2013) 425
- [27] G.-H. Halphen, *Sur une courbe elastique*, *Journal de l'ecole polytechnique*, 54^e cahier (1884) p.183 (available via gallica.bnf.fr)
- [28] G.-H. Halphen, *La courbe elastique plane sous pression uniforme*, Chap. V in *Traite des fonctions elliptiques et de leurs applications, Deuxieme partie. Applications a la mecanique, a la physique, a la geodesie, a la geometrie et au calcul integral.* p. 192
- [29] W. Helfrich, *Elastic Properties of Lipid Bilayers: Theory and Possible Experiments*, *Z. Naturforsch.* 28c (1973) 693-703
- [30] J. Hirakawa, *On a characteristic property of the circle*, *The Tôhoku Math. Journal* 37 (1933) 175
- [31] C. Huygens, *Constructio universalis problematis ...*, *Acta Eruditorum* Leipzig 1694 p. 338
- [32] C.G.J. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Königsberg, Bornträger 1829
- [33] G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*, *J. reine u. angewandte Math.* 56 (1859) 285-313
- [34] J. Langer, *Recursion in Curve Geometry*, *New York J. of mathematics* 5 (1999) 25-51
- [35] J. Langer, D.A. Singer, *The total squared curvature of closed curves*, *J. Differential Geometry* 20 (1984) 1-22
- [36] P. S. Laplace, *Oeuvres complètes de Laplace*, vol. 4, Gauthiers-Villars (1880)
- [37] R. Levien, *The elastica: A mathematical history*, www.levien.com/phd/elastica_hist.pdf
- [38] M. Lévy, *Memoire sur un nouveau cas integrable du probleme de l'elastique et l'une des ses applications*, *Journal de Mathematiques pures et appliquees* 3^e serie, tome 10 (1884) p. 5-42
- [39] A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press (1927), p. 263
- [40] K.L. Mampel, *Über Zindlerkurven* *Jour. für die reine und angewandte Mathematik* 234 (1967) 12-44

- [41] D. Oliveros, L. Montejano, *De volantines, espirógraphos y la flotación de los cuerpos*, Revista Ciencias 55-56 (1999) 46-53
- [42] M. Rédei, *On the tension between mathematics and physics*, <http://philsci-archive.pitt.edu/16071/> (2019)
- [43] A.N. Ruban, *Sur le problème du cylindre flottant*, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS, XXV (1939) 350
- [44] L. Saalschütz, *Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft*, B.G. Teubner, Leipzig (1880)
- [45] V. Salgaller and P. Kostelianetz, *Sur le problème du cylindre flottant*, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS, XXV (1939) 353
- [46] E. Salkowski, *Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises*, Heinrich Liebmann zum 60. Geburtstag, Sitz.berichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften (1934) 57-62
- [47] D.A. Singer, *Lectures on elastic curves and rods*, Curvature and variational modeling in physics and biophysics, AIP Conference Proc. 1002 (2008) 3-32
- [48] H. Singh, J.A. Hanna, *On the planar Elastica, Stress, and Material Stress*, Jour. of Elasticity 136 (2019) 87-101
- [49] S. Svetina, B. Žekš, *Membrane bending energy and shape determination of phospholipid vesicles and red blood cells*, Eur. Biophysics J 17 (1989) 101-111
- [50] S. Tabachnikov, *Tire track geometry: variations on a theme*, Israel J. of Math. 151 (2006) 1-28 archive.math.DG/0405445
- [51] I. Tadjbakhsh, F. Odeh, *Equilibrium states of elastic rings*, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 59-74
- [52] I. Todhunter, (K. Pearson, ed.), *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, 2 volumes, Cambridge University Press (1886, 1893). See also: en.wikiquote.org/wiki/A_History_of_the_Theory_of_Elasticity_and_of_the_Strength_of_Materials
- [53] C. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies: 1638-1788*, in: *Leonhard Euler, Opera Omnia*, Orell Füssli Turici, ser. 2, vol. XI, 2 (1960)
- [54] C. Truesdell, *Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli*, chapter Mechanics, especially Elasticity, in the correspondence of Jacob Bernoulli with Leibniz. Birkhäuser (1987)
- [55] S. Ulam, Problem 19 in *The Scottish Book*, ed. R.D. Mauldin, Birkhäuser (2015)

- [56] P.L. Varkonyi, *Floating Body Problems in Two Dimensions*, Studies in Appl. Mathematics 122 (2009) 195-218
- [57] F. Wegner, *Floating Bodies of Equilibrium*, Studies in Applied Mathematics 111 (2003) 167-183
- [58] F. Wegner, *Floating bodies of equilibrium I*, arxiv: Physics/0203061
- [59] F. Wegner, *Floating bodies of equilibrium II*, arxiv: Physics/0205059
- [60] F. Wegner *Floating bodies of equilibrium. Explicit Solution*, arxiv: Physics/0603160
- [61] F. Wegner, *Floating bodies of equilibrium in 2D, the tire track problem and electrons in a parabolic magnetic field*, arxiv: Physics/0701241v3
- [62] Wikipedia contributors, *Euler-Bernoulli beam theory*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Bernoulli_beam_theory ; *Balkentheorie*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, <https://de.wikipedia.org/wiki/Balkentheorie>
- [63] K. Zindler, *Über konvexe Gebilde. II. Teil*, Monatsh. Math. Physik 31 (1921) 25-57