

# Vielteilchentheorie, Nichtrelativistische QFT

Literatur: z.B. Grawert, Baym

## 1) Identische Teilchen

### a) Pauli-Prinzip

Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen:

$$\text{Hilbertraum } \mathcal{H}_{1/2} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}_0$$

↙ ohne Spin

Wellenfunktion für 2 Teilchen

$$\Psi(\vec{x}_1, r_1; \vec{x}_2, r_2)$$

↑                    ↑  
Spin                    Spin

Definiere  $\pi_s, \pi_\sigma$ :

$$\pi_s \Psi(\vec{x}_1, r_1; \vec{x}_2, r_2) = \Psi(\vec{x}_1, r_2; \vec{x}_2, r_1)$$

$$\pi_\sigma \Psi(\vec{x}_1, r_1; \vec{x}_2, r_2) = \Psi(\vec{x}_2, r_1; \vec{x}_1, r_2)$$

Offenbar  $\pi_s^2 = \mathbb{1}, \pi_\sigma^2 = \mathbb{1}$

→ Eigenwerte  $\epsilon_s = \pm 1, \epsilon_\sigma = \pm 1$

Definiere  $\pi_{ges} = \pi_s \otimes \pi_\sigma$

$$\begin{aligned} \rightarrow \pi_{ges}(u \phi) &= (\pi_s u)(\pi_\sigma \phi) = \epsilon_s u \epsilon_\sigma \phi \\ &= \underbrace{\epsilon_s \epsilon_\sigma}_{= \epsilon_{ges}} u \phi \end{aligned}$$

↑                    ↑                    ↗  
Spin                    Ort                    für Eigenfunktionen  $u, \phi$  von  $\pi_s, \pi_\sigma$

Pauli-Prinzip:  $\epsilon_{ges} = -1$  für Fermionen

(2)

Hilbertraum für System aus 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen:

naiv:  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(1) \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(2) \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

mit Pauli-Prinzip:

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \{ \psi \in \mathcal{H}^2 \mid \Pi_{\text{ges}} \psi = -\psi \}$$

Konsistenz erfordert, daß alle physikalisch relevanten Operatoren mit  $\Pi_{\text{ges}}$  kommutieren.

↔ "Teilchen ununterscheidbar"

Ist man einmal im Unterraum aus Eigenfunktionen von  $\Pi_{\text{ges}}$  (beim Urzustand), so bleibt man also immer in diesem Unterraum.

Pauli-Prinzip gilt für Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  (Fermionen)

Bei Bosonen (Spin  $0, 1, 2, \dots$ ) gilt

$$\Pi_{\text{ges}} \psi = +\psi$$

Für mehr Teilchen: wellgenauere Austausch ( $\Pi_{\text{ges}}$ ) → Permutationen

### b) Permutationsgruppe

Sei  $S_n$  die Permutationsgruppe für  $n$  Objekte (Teilchen)

$$\pi \in S_n \rightarrow \pi(1, \dots, n) = (\pi(1), \dots, \pi(n))$$

$S_n$  ist endliche Gruppe mit  $n!$  Elementen.

Der Austausch von zwei Objekten (aus  $n$ ) heißt Transposition:

Def.  $T \in S_n$  heißt Transposition  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists_{i, j, 1 \leq i < j \leq n} T(1, \dots, i, j, \dots, n) = (1, \dots, j, \dots, i, \dots, n)$$

Jede Permutation kann durch Transpositionen erzeugt werden. Dies jedoch nicht eindeutig. Aber Parität der Zahl der Transpositionen (gerade / ungerade) ist eindeutig.

— def. Signum der Permutation  $\text{sign } \pi = \pm 1$

Für zwei Permutationen  $\pi_1, \pi_2$ :

$$\text{sign}(\pi_1 \pi_2) = \text{sign } \pi_1 \cdot \text{sign } \pi_2$$

Permutationsgruppe  $S_n$  hat Darstellung  
auf  $n$ -Teilchen Hilbertraum,  $\mathcal{H}^n = \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_{1/2}$

$\pi \in S_n$ :  $\pi \rightarrow \hat{\pi}$ ,  $\mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n$  mit

$$(\hat{\pi}\varphi)(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi(\xi_{\pi^{-1}(1)}, \xi_{\pi^{-1}(2)}, \dots, \xi_{\pi^{-1}(n)})$$

$\xi = (\vec{x}, \sigma)$   
Ort & Spin

Damit ist  $\hat{\pi}_1 \hat{\pi}_2 = \widehat{\pi_1 \pi_2}$

und für  $\pi = \mathbb{1} \rightarrow \hat{\pi} = \mathbb{1}$

und es wird

$$\varphi_1(\xi_1) \dots \varphi_n(\xi_n) \xrightarrow{\hat{\pi}} \varphi_{\pi(1)}(\xi_1) \dots \varphi_{\pi(n)}(\xi_n)$$

Für identische Teilchen  $\rightarrow$  Symmetrie:

$$\forall \pi \in S_n \quad [H, \hat{\pi}] = 0$$

d.h. die Dynamik (der Hamiltonoperator)  
ist symmetrisch (= invariant) unter

Permutationen der Teilchen.

$\rightarrow$  Wellenfunktionen können nach den  
Eigenschaften bzgl  $\hat{\pi}$  klassifiziert  
werden:

Eigenräume fester Energie  $V_E = \{\varphi \in \mathcal{H}^n \mid H\varphi = E\varphi\}$   
sind invariant unter  $\hat{\pi}$  und

tragen (o.B.d.A. irreduzible) Darstellung  
von  $S_n$ .

# c) Pauli-Prinzip, Slater-Determinante

5

Gruppentheorie  $\Rightarrow$  Es gibt genau zwei  
lineare Darstellungen von  $S_n$

(i)  $\hat{\pi} f = f$  triviale Darstellung

(ii)  $\hat{\pi} f = (\text{sign } \pi) f$  fast-triviale Darst.  
 $f$  total antisymmetrisch

Diese entsprechen (i) Bosonen bzw. (ii) Fermionen.

## Pauli-Prinzip für $n$ Elektronen (Fermionen)

$$\mathcal{H}_{\text{phys}}^n = \{ f \in \mathcal{H}^n \mid \forall_{\pi \in S_n} \hat{\pi} f = (\text{sign } \pi) f \}$$

$$[H, \hat{\pi}] = 0 \quad \leftarrow \text{Elektronen ununterscheidbar}$$

$$\rightarrow f \in \mathcal{H}_{\text{phys}}^n \quad \rightarrow \quad e^{-iHt/\hbar} f \in \mathcal{H}_{\text{phys}}^n$$

## Bosonen

$$\mathcal{H}_{\text{phys}}^n = \{ f \in \mathcal{H}^n \mid \forall_{\pi \in S_n} \hat{\pi} f = f \}$$

Wir schreiben auch

$$\mathcal{H}_n^F = \mathcal{H}_{\text{phys}}^n \quad \text{f. Fermionen}$$

$$\mathcal{H}_n^B = \mathcal{H}_{\text{phys}}^n \quad \text{f. Bosonen}$$

# Konstruktion von physikalischen Zuständen für Fermionen:

a) 2 Fermionen: Sei  $\tilde{A} = 1 - \hat{\pi}_2$ .

Dann ist  $\tilde{A}$  ein Projektor auf die physikalischen Zustände, d.h.

$$\tilde{A}: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2_{\text{phys}} \quad \text{Projektor}$$

Bew:  $f \in \mathcal{H}^2$  ( $\hat{\pi}_2^2 = \mathbb{1}$ )

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_2 \tilde{A} f &= \hat{\pi}_2 (1 - \hat{\pi}_2) f \stackrel{(\hat{\pi}_2^2 = \mathbb{1})}{=} (\hat{\pi}_2 - 1) f = - (1 - \hat{\pi}_2) f \\ &= - \tilde{A} f \end{aligned}$$

$\rightarrow \tilde{A} f \in \mathcal{H}^2_{\text{phys}} \quad \square$

Außerdem  $\tilde{A}^2 = 2\tilde{A}$ ,  $\rightarrow$  norm. Projektor ist  $A = \frac{1}{2}\tilde{A}$ .

b) n Fermionen

Antisymmetrisierungspoperator:

$$\tilde{A} = \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \hat{\pi}$$

$\tilde{A}$  ist Projektor  $\tilde{A}: \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n_{\text{phys}}$

Bew: Für  $\gamma \in S_n$ :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} \tilde{A} f &= \hat{\gamma} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \hat{\pi} f \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \gamma) (\text{sign } \gamma \pi) \hat{\gamma} \hat{\pi} f \\ &= (\text{sign } \gamma) \tilde{A} f \end{aligned}$$

$\square$

(7)

Anforderung gilt  $\tilde{A}^2 = n! \tilde{A}$

Bew: 
$$\begin{aligned} \tilde{A} \tilde{A} \psi &= \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \hat{\pi} \underbrace{A \psi}_{\in K_n^{\mathbb{F}}} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) (\text{sign } \pi) A \psi \\ &= \sum_{\pi \in S_n} A \psi = n! A \psi \quad \square \end{aligned}$$

Damit normierter Antisymmetrisierungsp.

$$A = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \hat{\pi}$$

Es gilt  $A^+ = A$ . (Invarianz unter Umbenennung d. Variablen)

einfachste Zustände in  $\mathcal{H}^n$ : Produkte  
 ————— in  $\mathcal{H}_n^{\mathbb{F}}$ : A-Produkte

Seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$  n Einteilchenzustände  $\varphi_\mu(\xi)$

$$\rightarrow \varphi_1(\xi_1) \cdots \varphi_n(\xi_n) = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$$

Damit  $\tilde{A} \varphi \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}}$ , mit Normierung auf  $\frac{1}{\sqrt{n!}}$  (nicht n)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n!}} (\tilde{A} \varphi)(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) (\hat{\pi} \varphi)(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \varphi_{\pi(1)}(\xi_1) \cdots \varphi_{\pi(n)}(\xi_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1) & \cdots & \varphi_n(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(\xi_n) & \cdots & \varphi_n(\xi_n) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \det(\varphi_\mu(\xi_\nu)) \end{aligned}$$

Diese (normierten) Slater-Determinanten

$$Sl(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \det(\varphi_j(\xi_k))$$

bilden eine Basis von  $\mathcal{H}_n^F$

Es gilt

$$* \varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ linear abhängig} \Rightarrow Sl(\varphi_1, \varphi_n) = 0$$

\* Schmidt-Orthogonalisierung ändert Wert der Determinante nicht.

$$* Sl(\varphi_{\pi(1)}, \dots, \varphi_{\pi(n)}) = (\text{sign } \pi) Sl(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

## Konstruktion von physikalischen Zuständen für Bosonen

Für Bosonen

$$\mathcal{H}_n^B = \{ f \in \mathcal{H}^n \mid \forall \pi \in S_n \hat{\pi} f = f \} = \mathcal{H}_n^{\text{phys}}$$

Benutze Symmetrisierungsoperator

$$S = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \hat{\pi}$$

S ist ein Projektionsoperator

$$S: \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}_n^B$$

Es gilt  $S^+ = S$ . (wg. Invarianz von n-dim. Integrals unter Umbenennung d. Variablen)



## 2) Fock-Räume, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Wir haben  $n$ -Teilchen-Hilberträume  $\mathcal{H}^n_{\text{phys}}$   
 für  $n = 0, 1, 2, \dots$  ( $n=0$  wichtig, s.u.)

Idee: Fasse alle diese Räume zu  
einem Raum zusammen: Fock-Raum

Hintergrund: in nicht-rel. QM Teilchenzahl  
 erhalten, aber bei hohen  
 Energien Teilchenzeugung und  
 -vernichtung möglich

→ Teilchenzahl unklar

→ wichtiges Hilfsmittel: Erzeugungs- und  
 Vernichtungsoperatoren im Fock-Raum.

### Fock-Räume

Def. zunächst „Null-Teilchen-Raum“  $\mathcal{H}^0$ :

$\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$ , d.h. 1-dim Hilbertraum  
 mit Skalarprodukt

$$f_0 \in \mathcal{H}^0 \rightarrow \langle f_0 | f_0 \rangle = f_0^* f_0$$

(hier keine Integration)

Definiere dann:

Fockraum  $\mathcal{H}^F$  der Fermionen

$$\mathcal{H}^F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^F = \mathcal{H}_0^F \oplus \mathcal{H}_1^F \oplus \mathcal{H}_2^F \oplus \dots$$

Fockraum  $\mathcal{H}^B$  der Bosonen

$$\mathcal{H}^B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^B$$

Also:  $f \in \mathcal{H}^{F,B} \Leftrightarrow f$  ist  $\infty$ -Tupel von  $n$ -Teilchenfunktionen.

d. h.

$$f = (f_0, f_1(\xi_1), f_2(\xi_1, \xi_2), \dots)$$

Man bezeichnet

$$|0\rangle = (1, 0, 0, \dots)$$

als (normiertes) Vakuum.

Dieses Vakuum in nicht-rel Theorie nur ein mathematischer Trick für Konsistenz der Notation / Fockraumbeschreibung, ohne phys. Konsequenz. In QFT hat Vakuum aber komplizierte Struktur.

Skalarprodukt im Fockraum (für  $\mathcal{H}^F$  und  $\mathcal{H}^B$ )

$$\langle f^{(1)}, f^{(2)} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n^{(1)}, f_n^{(2)} \rangle$$

wobei

$$f^{(i)} = (f_0^{(i)}, f_1^{(i)}, \dots)$$

Wir haben weiter Projektoren

$$P_n : \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \rightarrow \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$$

$$f \mapsto f_n$$

und wir können die natürliche Einbettung

$$\mathcal{H}_n^{\mathbb{F}} \subset \mathcal{H}^{\mathbb{F}} \quad \text{mit} \quad f_n \mapsto (0, \dots, 0, f_n, 0, \dots)$$

↑  
n-te Stelle

verwenden.

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \mathbb{1}$$

### Erzeugnis- und Verschiebungsoperatoren

Wichtigste Operatoren im Fockraum:

Erzeugnis ( $a^+$ ) und Verschieber ( $a$ ):

$$a^+, a : \mathcal{H}_1 \rightarrow \text{End } \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$$

d.h. für  $\varphi \in \mathcal{H}_1$ :  $a(\varphi) : \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$ ,

mit der Eigenschaft

$$a(\varphi) : \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \rightarrow \mathcal{H}_{n-1}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$$

$$a^+(\varphi) : \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$$

im Sinne obiger Einbettung.

Definition der Erzeuger  $a^+$  und Vernichter  $a$ .

Sei  $\varphi \in \mathcal{H}_1$ .

Für  $f \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}}$  definiere

$$a^+(\varphi) f := \sqrt{n+1} A \varphi \otimes f,$$

d.h.

$$(a^+(\varphi) f)(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) = \sqrt{n+1} A \varphi(\xi_1) f(\xi_2, \dots, \xi_{n+1})$$

Für  $f \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{B}}$  definiere

$$a^+(\varphi) f := \sqrt{n+1} S \varphi \otimes f$$

Für  $f \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$  definiere

$$(a(\varphi) f)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) := \sqrt{n} \int_{\xi} \varphi^*(\xi) f(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

Integration, um  
eine Variable  
loszuwerden

Integral über kont. Variable,  
Summe über diskrete (Spin)

In dieser Def. ist erste Stelle von  $f$  bei Integration ausgezeichnet, aber wegen (Anti-)Symmetrie nicht schlüssig.

Also gilt

$$f_0 \in \mathcal{H}_0 \rightarrow a(\varphi) f_0 = 0$$

und für  $f = (f_0, f_1, f_2, \dots) \in \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$

$$a^+(\varphi) f = (0, \varphi f_0, \sqrt{2} \underset{(S)}{A} \varphi \otimes f_1, \dots)$$

$$a(\varphi) f = (\langle \varphi, f_1 \rangle, \sqrt{2} \int_{\xi} \varphi^* f_2, \dots)$$

## Wichtige Eigenschaften der Operatoren $a, a^+$

a)  $a^+(\varphi)$  ist hermitisch adjungiert zu  $a(\varphi)$ , d.h.

$$(a(\varphi))^+ = a^+(\varphi),$$

also

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \quad \langle \varphi_1, a^+(\varphi) \varphi_2 \rangle = \langle a(\varphi) \varphi_1, \varphi_2 \rangle.$$

Beweis: als Übung

b)  $a^+$  ist linear auf  $\mathcal{H}_1$ , d.h.

$$a^+(\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) = \lambda a^+(\varphi_1) + \mu a^+(\varphi_2)$$

$a$  ist antilinear auf  $\mathcal{H}_1$ , d.h.

$$a(\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) = \lambda^* a(\varphi_1) + \mu^* a(\varphi_2)$$

c) Vertauschungs- bzw. Antivertauschungsrelationen

Definieren Kommutator bzw. Antikommutator

$$[A, B]_- = [A, B] = AB - BA$$

$$[A, B]_+ = \{A, B\} = AB + BA$$

Für Fermionen und Bosonen gelten unterschiedliche Vertauschungsrelationen!

Seien  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_1$ .

Dann gilt für Fermionen

$$\{a(\varphi_1), a^+(\varphi_2)\} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \cdot Id$$

$$\{a(\varphi_1), a(\varphi_2)\} = 0$$

$$\{a^+(\varphi_1), a^+(\varphi_2)\} = 0$$

und für Bosonen

$$[a(\varphi_1), a^+(\varphi_2)] = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle Id$$

$$[a(\varphi_1), a(\varphi_2)] = 0$$

$$[a^+(\varphi_1), a^+(\varphi_2)] = 0$$

Beweis: als Übung, benutze Def. der Operatoren  
( $\rightarrow$  Operatoren A und S)

d) Zusammenhang mit Basissystemen

Für Fermionen sind ausgezeichnete Basissysteme die Slater-Determinanten.

Sei  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1,2,\dots}$  O.N.-Basis von  $\mathcal{H}_1$ .

Dann erhält man O.N.-Basis von  $\mathcal{H}_n^F$  aus

$$|l(\varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_n})(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(\xi_1) & \dots & \varphi_{\alpha_n}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{\alpha_1}(\xi_n) & \dots & \varphi_{\alpha_n}(\xi_n) \end{vmatrix}$$

In einem solchen Zustand bezeichnet man die 1-Teilchenzustände  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  als "besetzt", die anderen als "leer" oder "unbesetzt". Die Bedingung  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  bedeutet gerade, daß jeder Zustand höchstens einmal besetzt werden kann.

Die Operatoren  $a(\varphi_\alpha)$  und  $a^+(\varphi_\alpha)$  bilden normierte Slater-Determinanten auf normierte Slater-Determinanten ab!

Schreibe  $a_\alpha := a(\varphi_\alpha)$ ,  $a_\alpha^+ := a^+(\varphi_\alpha)$ .

Dann ist

$$a_\alpha^+ \text{Sl}(\varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_n}) = \text{Sl}(\varphi_\alpha \varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_n})$$

$$a_\alpha \text{Sl}(\varphi_\alpha \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_n}) = \text{Sl}(\varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_n})$$

$a_\alpha$  vermittelt Besetzung von  $\varphi_\alpha$ , d.h.

$$a_\alpha \text{Sl}(\dots) = 0 \quad \text{falls } \alpha \text{ nicht besetzt war}$$

$a_\alpha^+$  entfernt Besetzung von  $\varphi_\alpha$ . Daher

$$a_\alpha^+ \text{Sl}(\dots) = 0 \quad \text{falls } \alpha \text{ schon besetzt war}$$

Durch iteriertes Anwenden von  $a_\alpha^+$  auf das normierte Vakuum kann man alle Slater-Determinanten erzeugen,

$$a^+(\varphi) |0\rangle = \varphi$$

$$a^+(\varphi_1) \varphi = a^+(\varphi_1) a^+(\varphi) |0\rangle$$

$$= \varphi_1 \varphi$$

⋮

$$\varphi_1 \dots \varphi_n = a_{\alpha_1}^+ \dots a_{\alpha_n}^+ |0\rangle$$

Für eine gegebene Basis sind die Antivertauschungsrelationen

$$\{a_\alpha, a_\beta^+\} = \delta_{\alpha\beta} \cdot 1$$

$$\{a_\alpha, a_\beta\} = 0$$

$$\{a_\alpha^+, a_\beta^+\} = 0$$

Für Bosonen sind beliebige Besetzungen möglich. Sei wieder  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1, \dots}$  eine O.N.-Basis von  $\mathcal{H}_1$ . Dann lassen sich Zustände in  $\mathcal{H}_n^{\mathbb{B}}$  schreiben als

$$\phi = S \varphi_1 \dots \varphi_n$$



Sei dann  $\varphi \in \mathcal{F}_1$  mit  $\varphi \neq \varphi_1, \dots, \varphi_n$

Im  $(n+k)$ -Teilchenzustand

$$\psi = S \varphi^k \otimes \phi$$

ist also  $\varphi$   $k$ -mal besetzt. ( $\varphi^k(\xi_1, \dots, \xi_k) = \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_k)$ )

Die Wirkung von  $a(\varphi)$  auf Bosonenzustände ist festgelegt durch seine Wirkung auf  $\phi$  und  $\psi$ .

Es ist

$$a(\varphi) \phi = 0$$

und

$$a^+(\varphi) \psi = \sqrt{n+k+1} S \varphi^{k+1} \otimes \phi$$

$$a(\varphi) \psi = \frac{k}{\sqrt{k+1}} S \varphi^{k-1} \otimes \phi$$

Bemerkung: Definition von Zwei-Teilchen-Vermittlungs- / Erzeugungsoperatoren ist nicht nötig, da diese durch  $a$  und  $a^+$  generiert werden.

e) Operatorbasis in  $\mathcal{H}^{\mathbb{F}(\mathbb{B})}$

Jede Funktion in  $\mathcal{H}^{\mathbb{F}(\mathbb{B})}$  ist darstellbar als Linearkombination von Funktionen

$$f_1 = a_{\alpha_1}^+ \dots a_{\alpha_n}^+ |0\rangle$$

mit  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  f. Fermionen  
 $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$  f. Bosonen.

Also

$$a_{\alpha_n} \dots a_{\alpha_1} f_1 = |0\rangle$$

Wenn  $f_2 = a_{\beta_1}^+ \dots a_{\beta_n}^+ |0\rangle$ .

so 
$$f_2 = a_{\beta_1}^+ \dots a_{\beta_n}^+ a_{\alpha_n} \dots a_{\alpha_1} f_1$$
  
$$= |f_2\rangle \langle f_1 | f_1\rangle$$

Jeder Operator in  $\mathcal{H}^{\mathbb{F},\mathbb{B}}$  (in diesem Beispiel also die Abbildung  $f_1 \mapsto f_2$ ) ist entwickelbar in "Normalprodukte"

der Form

$$a_{\beta_1}^+ \dots a_{\beta_n}^+ a_{\alpha_n} \dots a_{\alpha_1}$$

in denen die Erzeuger links und die Vernichter rechts stehen.

### 3) Liften von Operatoren, Teilchenfalloperator

(19)

Liften von Operatoren hier für 1- und 2-Teilchenoperatoren, geht auch allgemein.

#### Ein-Teilchenoperatoren

Sei Operator  $B_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  gegeben,

z.B. kin. Energie  $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$

Impuls  $\vec{p} = -i\hbar \nabla$

Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

WW mit e.m. Feld

$$-\frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}) \right)^2 \quad \text{ohne Spin}$$
$$+ g \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad \text{mit Spin}$$

Definiere dann den zu  $B_1$  gehörenden gelifteten Operator  $B_n: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$  durch

$$B_n := \sum_{j=1}^n B_1(\xi_j),$$

gln. aus:

$$B_n := B_1 \otimes \text{Id}^{n-1} + \text{Id} \otimes B_1 \otimes \text{Id}^{n-2} + \dots$$
$$+ \text{Id}^{n-2} \otimes B_1 \otimes \text{Id} + \text{Id}^{n-1} \otimes B_1$$

wobei  $\text{Id}^n = \mathbb{1}^n = \underbrace{\text{Id}_{\mathcal{H}_1} \otimes \dots \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}_1}}_{n \text{ mal}}$

Beispiele: kin. Energie  $B_n = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^n \Delta_j$

Impuls  $B_n = \sum_{j=1}^n \vec{p}_j$

Um aus  $B_n$  Fockraum-Operator zu konstruieren, verlange

$$\forall \pi \in S_n \quad [B_n, \hat{\pi}] = 0,$$

$$\text{also } B_n \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}(\mathbb{R})} \rightarrow \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}(\mathbb{R})}$$

$$\text{Sei } f = (f_0, f_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{H}^{\mathbb{F}(\mathbb{R})}$$

Definiere den gelifteten Fockraumoperator

$$B : \mathcal{H}^{\mathbb{F}(\mathbb{R})} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbb{F}(\mathbb{R})}$$

durch

$$Bf := \sum_{n=0}^{\infty} B_n f_n = (B_0 f_0, B_1 f_1, \dots, B_n f_n, \dots)$$

mit

$$B_0 f_0 := 0 \quad \leftarrow \text{Vakuum soll keinen Impuls, keine Energie etc. haben.}$$

$$\text{Also } B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n.$$

Bemerkung: alle wichtigen Informationen sind schon in  $B_1$  enthalten.

Sei nun  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1, \dots}$  eine O.N.-Basis von  $\mathcal{H}_1$

Dann gilt

$$B = \sum_{\alpha, \beta} \langle \varphi_\alpha | B_1 | \varphi_\beta \rangle a^\dagger(\varphi_\alpha) a(\varphi_\beta)$$

und dies ist unabhängig von der Wahl der Basis!

Bew: als Übung.

## Zweitteilchenoperatoren

Sei  $V_2: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$  Zweitteilchenoperator

(z. B.  $\sum_{\mu < \nu} V(x_\mu, x_\nu)$ ). Dann sei  $V_n: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$  der geliftete  $n$ -Teilchenoperator

$$V_n = \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu < \nu}}^n V(x_\mu, x_\nu).$$

Respektiert  $V_n$  die (Anti-)Symmetrie, d.h. gilt wieder  $\forall \pi \in S_n [V_n, \hat{\pi}] = 0$ , so ist

der geliftete Fockraumoperator

$$V: \mathcal{H}^{\mp(\mathbb{R})} \rightarrow \mathcal{H}^{\mp(\mathbb{R})}$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n P_n \quad \text{mit } V_0 = V_1 = 0.$$

Hauptsatz. Es gilt

$$V = \frac{1}{4} \sum_{\alpha \beta \gamma \delta} V_{\alpha \beta \gamma \delta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma$$

beachte  
Reihenfolge!

wobei

$$V_{\alpha \beta \gamma \delta} = \langle \alpha \beta | V_2 | \gamma \delta \rangle$$

mit

$$|\alpha \beta\rangle = a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_\alpha \otimes \varphi_\beta \overset{(\pm)}{+}) \varphi_\beta \otimes \varphi_\alpha) \in \mathcal{H}_2^{\mp(0)}$$

↑  
- für Fermionen  
+ für Bosonen

Bew. als Übung.

Hier war  $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$  für (anti-)symmetrische Zustände berechnet. Allgemein kann man folgern:

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \underbrace{\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}}_{\text{Direktion}} (+) \underbrace{\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}}_{\text{Austauschterm}}$$

Mit

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \langle \varphi_\alpha \otimes \varphi_\beta | V_2 | \varphi_\gamma \otimes \varphi_\delta \rangle \\ &\rightarrow \sum_{r,r'} \int d^3x d^3x' \varphi_\alpha^*(\vec{x}, r) \varphi_\beta^*(\vec{x}', r') V(\vec{x}, \vec{x}') * \\ &\quad * \varphi_\gamma(\vec{x}, r) \varphi_\delta(\vec{x}', r') \end{aligned}$$

für lokales Potential

Man kann auch Operatoren für 3-Teilchen (oder mehr) - Wechselwirkung konstruieren, die aber in praktischen Anwendungen fast nie benötigt werden.

$$\left( \rightarrow \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} V_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\gamma^\dagger a_\delta a_\epsilon a_\delta \right)$$

Typischer Fall ist z.B. ein Hamiltonoperator mit 2-Teilchen - Wechselwirkung,  
 $H: \mathcal{H}^{\otimes(2)} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes(2)}$

$$H = \sum T_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta + \frac{1}{4} \sum V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma$$

$$\text{mit } T_{\alpha\beta} = \langle \varphi_\alpha | -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta | \varphi_\beta \rangle$$

Teilchenzahl - Operator

Sei  $\hat{N}$  die geliftete Identität.

Es ist also  $B_1 = Id$

$$\rightarrow \langle \alpha | B_1 | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

Also

$$\hat{N} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}$$

Dann

$$B_n = B_1 \otimes Id^{n-1} + \dots + Id^{n-1} \otimes B_1 = n \cdot Id_{\mathcal{H}_n}$$

Also für  $f_n \in \mathcal{H}_n^{F(B)}$

$$\hat{N} f_n = n f_n$$

Gleichzeitig  $H f_n = H_n f_n$

$\rightarrow$  es gilt Symmetrie  $[H_n, \hat{N}] = 0$

Eigenwerte von  $\hat{N}$  sind gerade die Teilchenzahlen

4) Feldoperatoren

Definiere folgende Feldoperatoren

$$F(\xi) := \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\xi) a_{\alpha}$$

$$F^{\dagger}(\xi) := \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{\dagger}(\xi) a_{\alpha}^{\dagger}$$

Diese Definition ist unabhängig von Wahl der Basis  $\{\varphi_{\alpha}\}_{\alpha}$

# Eigenschaften der Feldoperatoren

a)  $F(\xi) : \mathcal{H}^{F(B)} \rightarrow \mathcal{H}^{F(B)}$  ist für festes  $\xi$  eine operatorwertige Distribution.  
 Es gilt

$$a_x(\varphi) = \int F(\xi) \varphi_x(\xi)$$

$$a_x^+(\varphi) = \int F^*(\xi) \varphi_x^*(\xi)$$

d.h. "verschmiert" (gewichtet) mit Gewichtsfunktion  $\varphi_x$  erhält man gerade  $a_x$  zurück.

b) (Anti-) Vertauschungsrelationen

$$[F(\xi), F(\xi')]_{\pm} = \delta(\xi - \xi') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{rr'}$$

$\swarrow$  für Fermionen +  
 Bosonen -

(Beweis mittels Vollständigkeitsrelationen)  
 Die (Anti-) Vertauschungsrelationen legen die Feldoperatoren fest, wenn der Vakuumzustand festgelegt ist



c) Sei  $\varphi_\xi := F^+(\xi) |0\rangle$  ein

„formaler“ Einteilchenzustand (genauer:  
dies ist eine Distribution)

Dann ist

$$\varphi_\xi(\xi') = \delta(\xi - \xi'),$$

d.h.  $F^+(\xi)$  erzeugt ein im Punkt  $\xi$   
„lokalisiertes“ Teilchen.

d) Struktur der 1-Teilchen-Operatoren

Betrachte den 1-Teilchen-Operator

$$\begin{aligned} B &= \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} a_\alpha^+ a_\beta \\ &= \sum_{\alpha\beta} \int_{\xi} \varphi_\alpha^*(\xi) B_1(\xi) \varphi_\beta(\xi) a_\alpha^+ a_\beta \\ &= \int_{\xi} F^+(\xi) B_1(\xi) F(\xi) \end{aligned}$$

Dies ist unabhängig von der Basis  $\{a_\alpha\}$ ,  
weil die Feldoperatoren es sind.

$$B = \int_{\xi} F^+(\xi) B_1(\xi) F(\xi)$$

ist die Quantisierung des Funktionals

$$\tilde{B} : \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\tilde{B}(\psi, \psi^*) := \int_{\xi} \psi^+(\xi) B_1(\xi) \psi(\xi)$$

mit Hilfe der Quantisierungsregel

$\psi \rightarrow F$ ,  $\psi^* \rightarrow F^+$  und Normalordnung  
(d.h.  $F^+$  links,  $F$  rechts).

Daher heißt diese Vorschrift "2. Quantisierung"  
(Der Erwartungswert wird quantisiert.)

e) Struktur der 2-Teilchen-Operatoren

$$V = \frac{1}{4} \sum V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\gamma} a_{\delta}$$

↑ (anti-)symmetrische Matrixelemente

Direkt- und Austauschoperatoren geben wegen der (Anti-)Vertauschungsrelationen den gleichen Beitrag:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \int_{\xi_1, \xi_2} \varphi_{\alpha}^*(\xi_1) \varphi_{\beta}^*(\xi_2) V(\xi_1, \xi_2) \varphi_{\gamma}(\xi_1) \varphi_{\delta}(\xi_2) a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\gamma} a_{\delta}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\xi_1, \xi_2} \mathbb{F}^{\dagger}(\xi_1) \mathbb{F}^{\dagger}(\xi_2) V(\xi_1, \xi_2) \mathbb{F}(\xi_2) \mathbb{F}(\xi_1)$$

Dies ist gerade die 2. Quantisierung von

$$\frac{1}{2} \int_{\xi_1, \xi_2} \varphi^*(\xi_1) \varphi^*(\xi_2) V(\xi_1, \xi_2) \varphi(\xi_2) \varphi(\xi_1)$$

Beachte Analogie zur Elektrodynamik:

Selbstenergie  $\rho(\xi_1) V(\xi_1, \xi_2) \rho(\xi_2)$  mit  $\rho = \varphi^* \varphi$

Beachte: Bei der Vorschrift der 2. Quantisierung ist Vorzeichen nicht festgelegt: die Funktionen  $\varphi$  sind vertauschbar, beim Vertauschen der Feldoperatoren treten aber für Fermionen zusätzliche Vorzeichen auf.

Bemerkung: In der Feldtheorie treten

häufig hermitesche Operatoren vom Typ

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{F} + \mathbb{F}^{\dagger})$$

$$\pi = -i \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{F} - \mathbb{F}^{\dagger})$$

auf.

5) Vakua

\* Es existiert ein eindeutiger Zustand  $\phi \in \mathcal{H}^{F(B)}$  mit

$$\forall_\alpha a_\alpha \phi = 0.$$

Es gilt

$$\forall_\alpha a_\alpha \phi = 0 \iff \phi = \lambda |0\rangle,$$

d.h. die Bedingung  $\forall_\alpha a_\alpha \phi = 0$  definiert das Vakuum  $|0\rangle$ .

Zum Beweis beachte, daß  $a(\varphi)\phi = 0$  bedeutet, daß  $\varphi$  in Produktentwicklung von  $\phi$  nicht vorkommt. Dies gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{H}_1^{F(B)}$ , also kommt kein  $\varphi$  in Produktentwicklung vor.

\* Betrachte nun Fermionen. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_1 a_2^+ a_3 a_4^+ | 0 \rangle &= \langle 0 | a_1 a_2^+ \underbrace{(a_3 a_4^+ + a_4^+ a_3)}_{= \delta_{34}} | 0 \rangle \\ & \quad \swarrow a_3 | 0 \rangle = 0 \\ &= \langle 0 | a_1 a_2^+ | 0 \rangle \delta_{34} \\ &= \delta_{12} \delta_{34} \end{aligned}$$

Frage: Ist diese Rechnung aufgrund der algebraischen Relationen auch allgemeiner  
 betrachtet man die  $N$ -reihige Determinante?

$$\begin{aligned}\phi &:= \det \varphi_1 \dots \varphi_N \\ &= a_1^+ \dots a_N^+ |0\rangle\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}a_\alpha^+ \phi &= 0 && \text{für } \alpha = 1, \dots, N \\ a_\alpha \phi &= 0 && \text{für } \alpha > N.\end{aligned}$$

Dies entspricht der Vakuum-eigenschaft  
 mit folgender Redefinition der Operatoren  
 (Bogoljubov - Transformation)

$$b_\alpha := \begin{cases} a_\alpha^+ & \text{für } \alpha = 1, \dots, N \\ a_\alpha & \text{für } \alpha > N \end{cases}$$

Dabei nennt man  $\phi$  das Quasiteilchen-  
Vakuum, die  $b_\alpha$  Quasiteilchenoperatoren.

$N$  heißt dann Fermikante.

Beachte: Für Definition dieser Operatoren muß  
 das neue Vakuum festgelegt sein!

Es gilt dann

$$\forall_\alpha \quad b_\alpha \phi = 0$$

und

$$\{b_\alpha^+, b_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

Man bezeichnet dann oft

$\alpha \leq N$  mit kleinen Buchstaben  
 $\alpha = a, b, \dots$

$\alpha > N$  mit großen Buchstaben  
 $\alpha = A, B, \dots$

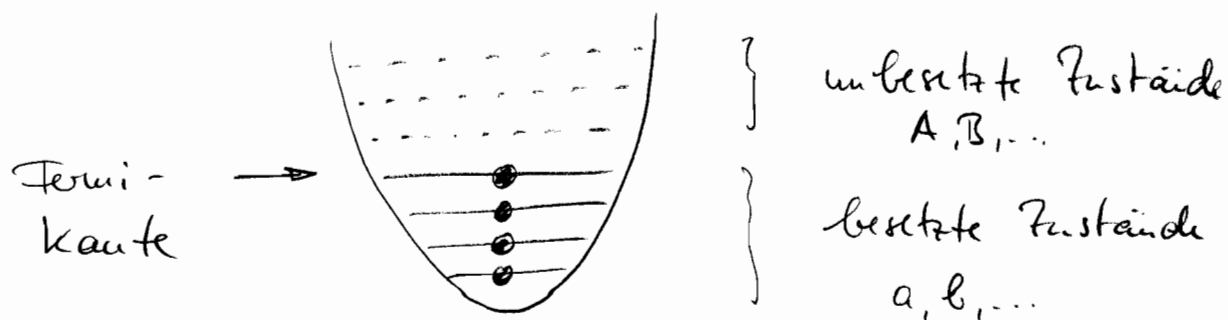
Also

$$b_A = a_A$$

$$b_a = a_a^+$$

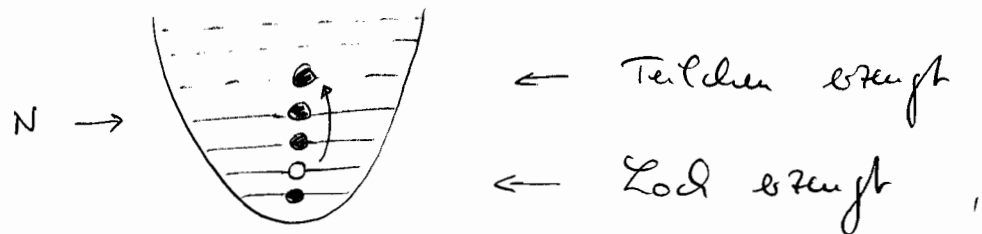
\* Zur Interpretation dieser Bogolyubov-Transformation:

Das Quasiteilchenvakuum  $\phi$  anschaulicher  
 wir als



Der Operator  $b_A^+ b_a^+$  erzeugt zwei Quasiteilchenanregungen, nämlich

$$b_A^+ b_a^+ |\phi\rangle = a_A^+ a_a |\phi\rangle,$$



also eine Teilchen-Loch-Anregung.

Ähnlich: erzeugt  $b_A^+ b_B^+ b_a^+ b_b^+$  zwei Teilchen und zwei Löcher etc.

\* Allgemeines Prinzip solcher Bogoljubov-Transformationen: Ausgehend von  $a_\alpha, a_\alpha^+$  definiere unitäre Transformation

$$U: \mathcal{H}^{F(B)} \rightarrow \mathcal{H}^{F(B)}$$

Dann

$$b_\alpha = U a_\alpha U^{-1}$$

$$b_\alpha^+ = U a_\alpha^+ U^{-1}$$

(z.B. in einfachen Fällen Linearkombinationen)

Dann gilt

$$[b_\alpha, b_{\alpha'}^+]_{(\pm)} = \delta_{\alpha\alpha'} \quad \text{usw.}$$

Definiere dann  $\phi = U|0\rangle$  als Quasiteilchenvakuum.

D.h. erhält man durch diese Transformation aus den alten Operatoren  $A(a, a^\dagger)$  neue Operatoren  $\tilde{A}(b, b^\dagger)$  und ist dann an deren Erwartungswerte  $\langle \phi | \tilde{A}(b, b^\dagger) | \phi \rangle$  interessiert.

\* Eine mögliche Verallgemeinerung ist die spezielle Bogoljubov-Transformation.

Diese ist oft nützlich, wenn die Einzelchen Zustände physikalisch sinnvoll zu Paaren zusammengefaßt werden können. Die entsprechenden Zustände der Paare seien  $\alpha$  und  $\bar{\alpha}$ , d.h.

es gilt eine Zuordnung  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  auf  $\mathcal{H}_1$ .

Wir können dann für Fermionen definieren

$$\begin{aligned} b_\alpha &= \sin \gamma_\alpha a_{\bar{\alpha}}^\dagger + \cos \gamma_\alpha a_\alpha \\ b_{\bar{\alpha}} &= -\sin \gamma_\alpha a_\alpha^\dagger + \cos \gamma_\alpha a_{\bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (\gamma_\alpha \in \mathbb{R})$$

woraus man erhält

$$\begin{aligned} b_\alpha^\dagger &= \cos \gamma_\alpha a_\alpha^\dagger + \sin \gamma_\alpha a_{\bar{\alpha}} \\ b_{\bar{\alpha}}^\dagger &= \cos \gamma_\alpha a_{\bar{\alpha}}^\dagger - \sin \gamma_\alpha a_\alpha \end{aligned}$$



Wieder gilt dann

$$\{b_{\alpha}^{\dagger}, b_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

und das zugehörige Quasiteilchen-Vakuum ist

$$\phi = \prod_{\alpha} [\cos \gamma_{\alpha} - \sin \gamma_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\bar{\alpha}}^{\dagger}] |0\rangle.$$

Typische Beispiele für solche Paare von Einteilchenzuständen sind.

- in der Kernphysik

$$\alpha = (n, j, l, m)$$

$$\bar{\alpha} = (n, j, l, -m)$$

$$j = l \pm \frac{1}{2}$$

- in der Festkörperphysik

$$\alpha = (\vec{p}, \uparrow)$$

$$\bar{\alpha} = (-\vec{p}, \downarrow)$$

z. B. in der BCS-Theorie der Supraleitung (Bardeen, Cooper, Schrieffer)

[ In diesem Fall beschreibt obiges Quasiteilchenvakuum Cooper-Paare. ]

Für Bosonen kann man die spezielle Bogoljubov-Transformation in ähnlicher Weise definieren:

$$\begin{aligned} b_{\alpha} &= \sinh \gamma_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} + \cosh \gamma_{\alpha} a_{\alpha} \\ b_{\alpha}^{\dagger} &= \sinh \gamma_{\alpha} a_{\alpha} + \cosh \gamma_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \end{aligned} \quad (\gamma_{\alpha} \in \mathbb{R})$$

(und hieraus  $b_{\alpha}^{\dagger}, b_{\alpha}$  durch Adjungieren) mit dem Quasiteilchenvakuum

$$\phi = \left( \frac{\pi}{\alpha} \cosh \gamma_{\alpha} \right)^{-1/2} \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \tanh \gamma_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}^{\dagger} \right] |0\rangle$$

Die Transformation

$$\begin{aligned} b_{\alpha} &= a_{\alpha} + \lambda_{\alpha} \cdot \mathbb{1} \\ b_{\alpha}^{\dagger} &= a_{\alpha}^{\dagger} + \lambda_{\alpha}^* \cdot \mathbb{1} \end{aligned} \quad (\lambda_{\alpha} \in \mathbb{C})$$

mit

$$\phi = \exp \left( \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \right) |0\rangle$$

tritt in der Quantenoptik auf  
( $\rightarrow$  kohärente Zustände)

## 6) Normalprodukte

Normalprodukte nennt man solche Operatoren, bei denen die Erzeuger links und die Vernichter rechts stehen. Jeder Operator läßt sich in Normalprodukte entwickeln (siehe unten). Man hat also die Operatorbasis

$$a_{\alpha_1}^+ \dots a_{\alpha_n}^+ a_{\beta_1} \dots a_{\beta_m}$$

Diese Anordnung ist natürlich, da dann - falls  $m \neq 0$  - das Vakuum auf Null abgebildet wird.

Für die bzgl. eines Quasiteilchenvakuum  $\phi$  definierten Operatoren  $b_\alpha, b_\alpha^+$  haben wir "b-Normalprodukte" als natürliche Operatorbasis:

$$b_{\alpha_1}^+ \dots b_{\alpha_n}^+ b_{\beta_1} \dots b_{\beta_m}$$

Dabei ist aber ein nichttriviales Zustand  $\phi$  ausgezeichnet.

Problem ist dann die Entwicklung  
eines beliebigen Produkts  $B_1 \dots B_n$   
mit  $B_p = b_{\alpha_p}$  oder  $b_{\alpha_p}^+$  nach  
 $b$ -Normalprodukten.

Beispiel:  $b_b b_a^+ = \delta_{ab} - b_a b_b^+$ .

Die Normalprodukte bzgl.  $|0\rangle$  (d.h. für  
die Operatoren  $a_x, a_x^+$ ) erhält man dann  
als Spezialfall für  $\phi = |0\rangle$ .

Definition. Normalordnung für Fermionen

$$: \dots : : \text{End } \mathcal{H}^F \rightarrow \text{End } \mathcal{H}^F$$

$$B_1 \dots B_n \mapsto : B_1 \dots B_n :$$

mit

$$: B_1 \dots B_n : = \text{sign } \sigma B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(n)},$$

wobei  $\sigma \in S_n$  eine Permutation ist, so  
daß  $B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(n)}$  ein Normalprodukt.

Diese Permutation ist nicht eindeutig,  
dies wird aber durch  $\text{sign } \sigma$  wieder  
ausgeglichen. Der normalgeordnete Operator  
ist von der Wahl der Indizes

unabhängig.  
(Für Bosonen:  $\text{sign } \sigma$  weglassen!)

# Hauptsatz: Wicksche Regel

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n &= : \mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n : \\
 &+ \sum_{\mu < \nu} k_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} : \mathcal{B}_1 \dots \hat{\mathcal{B}}_\mu \dots \hat{\mathcal{B}}_\nu \dots \mathcal{B}_n : \\
 &+ \sum_{\substack{\mu_1 < \nu_1 \\ \mu_2 < \nu_2 \\ \mu_1 < \mu_2}} k_{\mu_1 \nu_1} k_{\mu_2 \nu_2} \varepsilon_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} : \mathcal{B}_1 \dots \hat{\mathcal{B}}_{\mu_1} \dots \hat{\mathcal{B}}_{\mu_2} \dots \hat{\mathcal{B}}_{\nu_1} \dots \hat{\mathcal{B}}_{\nu_2} \dots \mathcal{B}_n : \\
 &+ 6 \text{ Terme weglassen} + \text{usw.} \\
 &+ \dots + \begin{cases} \text{alle weglassen falls } n \text{ gerade} \\ \text{bis auf einen weglassen falls} \\ \quad n \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

↓ weglassen!

Dabei ist  $k_{\mu\nu}$  die Kontraktion

$$k_{\mu\nu} = \langle \phi | \mathcal{B}_\mu \mathcal{B}_\nu | \phi \rangle ,$$

d.h. der Vakuumerwartungswert bzgl. des Vakuums  $\phi$ .

Für Bosonen sind  $\varepsilon_{\dots} = +1$ .

Für Fermionen:  $\varepsilon_{\mu\nu} = (-1)^m = (-1)^{\mu+\nu+1}$

wobei  $m$  die Zahl der Transpositionen, die  $\mu$  und  $\nu$  benachbart machen.

Analog  $\varepsilon_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} = (-1)^m$  mit  $m =$  Zahl der Transpositionen, die  $\mu_1$  und  $\nu_1$  und  $\mu_2$  und  $\nu_2$  benachbart machen etc.

Beweis der Wick'schen Regel: durch Induktion.  $n=2$  läßt sich leicht "durchprobieren". Dann behandelt man mittels der Fälle, daß der zusätzliche Operator im Schritt  $n \rightarrow n+1$  ein Erzeuger oder Vernichter ist.

Man schreibt Kontraktionen oft als

$$\overbrace{B_\mu B_\nu} = \langle \phi | B_\mu B_\nu | \phi \rangle.$$

Die Wick-Regel gibt also eine Entwicklung der Form

$$\begin{aligned} B &= B_1 \dots B_n \\ &= B^{(n)} + B^{(n-2)} + B^{(n-4)} + \dots + B^{(0)} \end{aligned}$$

mit (falls  $n$  gerade)

$$B^{(n)} = : B_1 \dots B_n :$$

$$B^{(n-2)} = : B_1 \dots \overbrace{B_\mu B_\nu} \dots B_n :$$

$$B^{(n-4)} = : B_1 \dots \overbrace{B \dots B} \dots \overbrace{B \dots B} \dots B_n :$$

$\vdots$

$$B^{(0)} \sim \text{Id} \quad \leftarrow \text{vollständige Kontraktion}$$

Die Wick-Regel ist linear und gilt daher auch für  $\mathcal{B}_\mu$  von der Form

$$\mathcal{B}_\mu = \alpha_{\mu\nu} b_\nu + \beta_{\mu\nu} b_\nu^\dagger.$$

## 7) Anwendungen der nicht-relativistischen QFT

In der nicht-rel. QFT lassen sich viele Probleme der Vielteilchentheorie sehr elegant formulieren, die sonst recht mühsam werden.

Ein Beispiel dafür ist die Hartree-Fock-Theorie zum Auffinden des Grundzustands eines fermionischen Systems mittels eines Variationsverfahrens. (Anschließend kann man auch die Anregungsenergien damit bestimmen.)

Dabei berücksichtigt man das Pauli-Prinzip, indem man für den Grundzustand eine Slater-Determinante ansetzt und diese mit einem

Variationsverfahren optimiert. Diese Variations läßt sich durch Einheitsoperatoren  $a_\alpha, a_\alpha^\dagger$  formulieren. Es läßt sich dann eine Bedingung herleiten (Hartree-Fock-Gleichung), die ein Eigenwertproblem darstellt, in dem der Operator selbstkonsistent von der Lösung abhängt. Dieses läßt sich in der Praxis oft durch Iteration ausgehend von einem Ansatz lösen.

Für diese und viele weitere interessante und wichtige Anwendungen siehe die Literatur, z.B.

Blair & Ripka,

"Quantum Theory of Finite Systems"