Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, E. Thommes

Universität Heidelberg
Sommersemester 2010

7. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 01.06.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 27./28.05.2010

P 24 Parität (4 Punkte)

Der Paritätsoperator $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ ist definiert als ein Operator, der in der Ortsdarstellung auf einen Zustand $|\psi\rangle$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ wirkt gemäß

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Paritätsoperators:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^2 = \mathbf{1}\,, \qquad\qquad \boldsymbol{\mathcal{P}}^\dagger = \boldsymbol{\mathcal{P}}\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, daß der Paritätsoperator unitär ist und die Eigenwerte ± 1 hat.

(b) Zeigen Sie weiter, daß der Paritätsoperator mit dem Ortsoperator $\vec{\mathbf{Q}}$ und dem Impulsoperator $\vec{\mathbf{P}}$ antivertauscht, d. h.

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\vec{\mathbf{Q}} = -\vec{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\mathcal{P}}\,, \qquad\qquad \boldsymbol{\mathcal{P}}\vec{\mathbf{P}} = -\vec{\mathbf{P}}\boldsymbol{\mathcal{P}}\,. \tag{3}$$

Eigenzustände zum Paritätsoperator mit Eigenwert $+1$ (-1) bezeichnet man als Zustände positiver (negativer) Parität.
Wir wollen jetzt den eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Hamiltonoperator $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{Q}^2$ betrachten.

(c) Zeigen Sie, daß $[\boldsymbol{\mathcal{P}}, \mathbf{H}] = 0$.

(d) Welche Parität haben die Eigenzustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators? Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Parität und der (Anti-)Symmetrie der Wellenfunktion her.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Grundzustand. Für die angeregten Zustände ist es hilfreich zu zeigen, daß $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A}^\dagger\boldsymbol{\mathcal{P}} = 0$.

S 25 Gaußsches Wellenpaket III (7 Punkte)

Wir untersuchen weiter das eindimensionale Gaußsches Wellenpaket aus Aufg. 23, d. h. ein Wellenpaket, das zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form

$$\psi(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}\, \phi(k) \tag{4}$$

hat, wobei mit $a, k_0 \in \mathbb{R}$

$$\phi(k) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-a^2(k-k_0)^2} \,. \tag{5}$$

In Aufg. 23 wurde dafür die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ zur Zeit t berechnet:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{a}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{a}^2}\left(x - \frac{\hbar k_0}{m} t\right)^2\right] \,. \tag{6}$$

mit $\tilde{a}^2 = a^2(1 + t^2/\tau^2)$.
Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte des Orts- und des Impulsoperators. (Das Resultat aus Aufg. 23 (b) kann hierzu verwendet werden.) Vergleichen Sie das Resultat mit den Ehrenfestschen Gleichungen. Bestimmen Sie auch die zeitliche Entwicklung des Schwankungsprodukts $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem minimal möglichen Wert, der sich aus der Unschärferelation ergibt.

S 26 Eindimensionale Potentialbarriere (9 Punkte)

Wir betrachten eine eindimensionale Potentialbarriere der Höhe $V_0 \in \mathbb{R}_+$ und der Tiefe $a \in \mathbb{R}_+$. Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse m ist im Ortsraum

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{7}$$

mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \le x \le a \,. \\ 0 & \text{für } a < x \end{cases} \tag{8}$$

Wir wollen verallgemeinerte Eigenzustände $\psi(x)$ von $\mathbf{H}$ zur Energie E finden. Dabei soll zunächst $0 < E < V_0$ gelten. Wir machen den allgemeinen Ansatz (vgl. Vorlesung)

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} & \text{für } 0 \le x \le a \\ Ee^{ikx} + Fe^{-ikx} & \text{für } a < x \end{cases} \tag{9}$$

mit $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie k und k' so, daß dieses $\psi(x)$ ein verallgemeinerter Eigenzustand zur Energie E ist. Wir wollen eine „von links einlaufende ebene Welle“ untersuchen. Dazu wählen wir $A = 1$ und $F = 0$. Finden Sie die notwendigen (Anschluß-)Bedingungen für die anderen Koeffizienten $B, \ldots, E$ in Form eines linearen Gleichungssystems. In diesem Gleichungssystem können die Koeffizienten C und D eliminiert werden und man findet

$$B = \frac{(k^2 - k'^2)(1 - e^{2ik'a})}{(k+k')^2 - (k-k')^2 e^{2ik'a}} \tag{10}$$

$$E = \frac{4kk' e^{i(k'-k)a}}{(k+k')^2 - (k-k')^2 e^{2ik'a}} \,. \tag{11}$$

Bestimmen Sie hieraus den Reflexionskoeffizienten $R = |B|^2$ und den Transmissionskoeffizienten $T = |E|^2$, d. h. die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein Teilchen am Potential reflektiert wird bzw. durch das Potential tunnelt. Zeigen Sie $R + T = 1$.
Die obigen Resultate gelten auch, wenn $E \geq V_0$ gilt. Wie sieht k' in den Fällen $E \leq V_0$ und $E \geq V_0$ aus? Wie wirkt sich das auf die funktionale Abhängigkeit der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus?
Skizzieren Sie den Transmissionskoeffizienten als Funktion von E/V_0 im Bereich $0 \leq E/V_0 \leq 4$, zum Beispiel für $mV_0a^2/\hbar^2 = 8$. Wie groß ist der Transmissionskoeffizient im Fall $E \to V_0$? Bei welchen Energiewerten ist die Barriere vollständig durchlässig?

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm10.html