Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
C. Ewerz | Wintersemester 2010/11

4. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 17.12.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 20.-22.12.2010

S 9 Freier Propagator im Impulsraum (6 Punkte)

Aus dem Propagator im Ortsraum, $K(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_0, t_0)$, kann man durch Fouriertransformation den Propagator im Impulsraum gewinnen,

$$K(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) = \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1\right) K(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_0, t_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}_0 \cdot \vec{x}_0\right) d^3x_0\, d^3x_1\,, \tag{1}$$

der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang eines Teilchens vom Impuls $\vec{p}_0$ zur Zeit t_0 zum Impuls $\vec{p}_1$ zur Zeit t_1 beschreibt.

(a) Zeigen Sie, daß die Impulsraumdarstellung des freien Propagators

$$K_0(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_0, t_0) = \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t_1 - t_0)}\right]^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{im(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)}\right] \tag{2}$$

gegeben ist durch

$$K_0(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) = (2\pi\hbar)^3\, \theta(t_1 - t_0)\, \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1)\, \exp\left[\frac{-i\vec{p}_0^{\,2}(t_1 - t_0)}{2\hbar m}\right]. \tag{3}$$

Hinweis: Es ist günstig, eine Transformation zu neuen Koordinaten $\vec{x} = \vec{x}_0 - \vec{x}_1$, $\vec{X} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$, und $\vec{p} = \vec{p}_0 - \vec{p}_1$, $\vec{P} = \vec{p}_0 + \vec{p}_1$ durchzuführen.

Durch eine weitere Fouriertransformation bzgl. t erhält man den Propagator in Abhängigkeit von der Energie E,

$$K(\vec{p}_1, E_1; \vec{p}_0, E_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,E_1 t_1\right) K(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,E_0 t_0\right) dt_0\, dt_1\,, \tag{4}$$

der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang von einem Impuls $\vec{p}_0$ und einer Energie E_0 zu einem Impuls $\vec{p}_1$ und einer Energie E_1 beschreibt.

(b) Berechnen Sie den freien Propagator in dieser Darstellung, d. h. $K_0(\vec{p}_1, E_1; \vec{p}_0, E_0)$.

Hinweis: Hierbei tritt ein Integral der Form $\int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau$ auf, das für reelle ω nicht konvergiert. Ersetzen Sie hier $\omega \to \omega + i\epsilon$ mit $\epsilon > 0$, um Konvergenz zu erzeugen, und belassen Sie das ϵ im Ergebnis.

S 10 Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung (4 Punkte)

Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\, \psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\,, \tag{5}$$

worin $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß mit $r = |\vec{x}|$

$$G_\pm(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \tag{6}$$

Greensche Funktionen der Helmholtz-Gleichung sind, d. h.

$$(\Delta + k^2)\, G_\pm(\vec{x}) = \delta(\vec{x})\,. \tag{7}$$

Hinweis: Benutzen Sie den Laplace-Operator Δ in sphärischen Polarkoordinaten.

P/S 11 Streuamplitude in Bornscher Näherung (10 Punkte)

In Bornscher Näherung ist die Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ für die Streuung am Potential $V(\vec{x})$ gegeben durch

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\, V(\vec{q})\,, \tag{8}$$

worin $V(\vec{q})$ die Fouriertransformierte des Potentials $V(\vec{x})$ ist,

$$V(\vec{q}) = \int d^3x\, V(\vec{x})\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\,. \tag{9}$$

Dabei ist $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ der Streuwellenvektor, d. h. die Differenz zwischen den Wellenvektoren des auslaufenden und des einlaufenden Teilchens.

(a/P) Zeigen Sie, daß für kugelsymmetrische Potentiale, also für $V(\vec{x}\,) = V(r)$ mit $q = |\vec{q}\,|$ gilt

$$V(\vec{q}\,) = V(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr\, V(r)\, r \sin(qr)\,. \tag{10}$$

(b) Berechnen Sie $V(q)$ für
(i/S) das Yukawa-Potential

$$V(r) = A\, \frac{e^{-r/\mu}}{r}\,, \tag{11}$$

(ii/S) das Gauß-Potential

$$V(r) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) , \tag{12}$$

(iii/P) für das Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{13}$$

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-10.html