Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz

Universität Heidelberg
Wintersemester 2010/11

1. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 5.11.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 8.-11.11.2010

Schriftlich zu bearbeitende Aufgaben sind mit einem S gekennzeichnet, Präsenzaufgaben mit einem P. Die Präsenzaufgaben sollen **vor** den Übungen gelöst werden. Die Punkte für diese Aufgaben gibt es für die Bereitschaft zum Vorrechnen. Es empfiehlt sich, dann auch eine Lösung parat zu haben. (Sonst werden die Punkte wieder abgezogen.)

P 1 Translationsoperator (4 Punkte)

Der Translationsoperator ist für $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert als

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{a}\cdot\vec{\mathbf{P}}\right)\,, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{P}$ der Impulsoperator ist.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{T}_{\vec{a}}$ unitär ist und daß

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,a_1\mathbf{P}_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,a_2\mathbf{P}_2\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,a_3\mathbf{P}_3\right)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie außerdem, daß $\mathbf{T}_{\vec{a}}$ die Darstellungseigenschaft besitzt, d. h. daß für $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{T}_{\vec{a}}\mathbf{T}_{\vec{b}} = \mathbf{T}_{\vec{a}+\vec{b}}\,. \tag{3}$$

(b) Betrachten Sie $\psi \in \mathcal{H}$ in Ortsraumdarstellung, wobei $\psi(\vec{x})$ unendlich oft differenzierbar sei. Zeigen Sie daß

$$\mathbf{T}_{\vec{a}}\,\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}-\vec{a})\,. \tag{4}$$

S 2 Darstellung der Drehgruppe für Teilchen ohne Spin (6 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen in drei Dimensionen. Für eine Drehung $R \in SO(3)$ gilt $\det(R) = 1$ und $R^T R = \mathbf{1}$. Bezeichne $R_{\vec{\omega}}$ mit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ die Matrix einer Drehung mit dem Drehwinkel $|\vec{\omega}|$ und der Drehachse $\vec{\omega}/\,|\vec{\omega}|$.

(a) Bestimmen Sie für einen gegebenen Vektor $\vec{a}$ eine Matrix $I(\vec{a})$ so, daß für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$I(\vec{a})\,\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}\,. \tag{5}$$

Wählen Sie dann $\vec{a}$ in z-Richtung, $\vec{a} = \varphi\,\vec{e}_z$, und geben Sie $I(\vec{a})$ an. Zeigen Sie für diesen Fall, daß $\exp[I(\vec{a})]$ die Matrix $R_{\vec{a}}$ für eine Drehung um die z-Achse mit dem Drehwinkel φ ist.

Eine unitäre Darstellung D der Drehgruppe auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ für Teilchen ohne Spin kann man im Ortsraum definieren, indem man für $R_{\vec{\omega}} \in SO(3)$ und Zustände $|\psi\rangle$ setzt

$$D(R_{\vec{\omega}})\psi(\vec{x}) = \psi\left(R_{\vec{\omega}}^{-1}\vec{x}\right)\,. \tag{6}$$

(b) Zeigen Sie die sog. Darstellungseigenschaft

$$D(R_{\vec{\omega}_1} \cdot R_{\vec{\omega}_2}) = D(R_{\vec{\omega}_1})D(R_{\vec{\omega}_2})\,. \tag{7}$$

(c) Zeigen Sie, daß die Abbildung $D(R_{\vec{\omega}})$ unitär ist.

(d) Man kann allgemein zeigen

$$D(R_{\vec{\omega}}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{\mathbf{L}}\right)\,, \tag{8}$$

d. h. die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{L}}$ sind gerade die Generatoren der Drehungen auf den quantenmechanischen Zuständen. Überprüfen Sie diesen Zusammenhang für den Fall einer Drehung um die x_3-Achse.
Hinweis: Wählen Sie geeignete Koordinaten und ein geeignetes Funktionensystem.

S 3 Boost eines Teilchens (6 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen ohne Spin mit dem Hamiltonoperator $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung, so ist die als

$$\psi'(\vec{x},t) = \exp\left[\frac{im}{\hbar}\left(\vec{v}\cdot\vec{x} - \frac{1}{2}v^2 t\right)\right]\psi(\vec{x}-\vec{v}t,t) \tag{9}$$

definierte 'geboostete' Wellenfunktion ebenfalls eine Lösung.

(b) Zeigen Sie, daß für die Anwendung desselben Boosts auf die Funktion

$$\psi_{\vec{p}} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\cdot\vec{x} - \frac{t\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)\right] \tag{10}$$

gilt $\psi'_{\vec{p}} = \psi_{\vec{p}+\vec{v}m}$. Welche Bedeutung hat die Funktion $\psi_{\vec{p}}$?

S 4 Zeitumkehroperator für Teilchen ohne Spin (4 Punkte)

Wir betrachten Teilchen ohne Spin mit dem Hamiltonoperator $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})$. Der Zeitumkehroperator $\mathcal{T}$ sei definiert durch

$$\mathcal{T}\psi(\vec{x},t) = \psi^*(\vec{x},-t)\,. \tag{11}$$

(a) Zeigen Sie, daß der Zeitumkehroperator $\mathcal{T} : \psi \to \psi'$ antiunitär ist, d. h.

(i) Er ist antilinear.

(ii) Es gilt für ein hermitesches Skalarprodukt $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$.

(b) Zeigen Sie: Falls $\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung ist, so ist auch $\psi'(\vec{x},t) = \mathcal{T}\psi$ eine Lösung.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-10.html