

9. ÜBUNG ZUR QUANTENMECHANIK II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 21.12.2007
Besprechung der Präsenzaufgaben: 7.1.2008

P 22 Darstellung der Drehgruppe für Teilchen mit Spin 1/2 (16 Punkte)

Für allgemeine Drehimpulsoperatoren $\vec{\mathbf{j}}$ mit Komponenten $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ sollen die Beziehungen

$$\mathbf{j}_3 |j m\rangle = m |j m\rangle \quad (1)$$

$$\vec{\mathbf{j}}^2 |j m\rangle = j(j+1) |j m\rangle \quad (2)$$

$$\mathbf{j}_\pm |j m\rangle = (\mathbf{j}_1 \pm i \mathbf{j}_2) |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j(m \pm 1)\rangle \quad (3)$$

gelten, die für den Fall des normalen Drehimpulsoperators, $\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{L}}$ mit $j = l$, bekannt sind. Wir wollen jetzt die \mathbf{j}_i als lineare Abbildungen auf \mathbb{C}^{2j+1} auffassen, und die $|j m\rangle$ mit $m \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$ seien eine geeignete Basis von \mathbb{C}^{2j+1} .

Dadurch ist auch der Fall $j = 1/2$ definiert, den wir im folgenden betrachten wollen. Wir haben es dann gerade mit dem Spinoperator $\vec{\mathbf{S}}$ mit Komponenten \mathbf{S}_i zu tun. Die Basisvektoren sind dann

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Zeigen Sie:

(a) $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\sigma}/2$ mit den Paulimatrizen σ_i erfüllt obige Beziehungen.

(b) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis der hermiteschen komplexen 2×2 -Matrizen.

(c) Es gilt

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i \varepsilon_{klm} \sigma_m \quad (5)$$

und damit

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (6)$$

Hinweis: Betrachten Sie $[\sigma_k, \sigma_l]$ und $\{\sigma_k, \sigma_l\} = \sigma_k \sigma_l + \sigma_l \sigma_k$.

(d) Es gilt

$$\rho_{1/2}(R) \equiv \exp(-i\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{S}}) = \cos \frac{\varphi}{2} - i \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (7)$$

worin $\vec{\omega}$ der Drehvektor zu einer Drehung $R \in \text{SO}(3)$ ist und $\varphi = |\vec{\omega}|$. Betrachten Sie insbesondere die Fälle $\varphi = 0, 2\pi$ und 4π . Folgern Sie, daß $\rho_{1/2}$ keine eindeutige Abbildung der Drehungen ist.

Wir betrachten nun die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} h : \text{SU}(2) &\rightarrow \text{SO}(3) \\ \alpha &\rightarrow h(\alpha), \end{aligned} \quad (8)$$

$h(\alpha)\vec{e}_k = h_{jk}(\alpha)\vec{e}_j$ für orthonormale Basisvektoren \vec{e}_i von \mathbb{R}^3 , mit

$$\alpha\sigma_k\alpha^\dagger = h_{jk}(\alpha)\sigma_j. \quad (9)$$

(e) Überprüfen Sie:

- (i) Für jedes $\alpha \in \text{SU}(2)$ ist $h(\alpha)$ eine orthogonale Abbildung.
Hinweis: $\vec{a} \cdot \vec{a} = -\det(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})$ (warum?).
- (ii) $\pm \text{Id} \in \text{SU}(2)$ werden auf $\text{Id} \in \text{SO}(3)$ abgebildet.

Bemerkung: Man kann weiterhin zeigen, daß $\text{Bild}(h) \simeq \text{SO}(3)$, d. h. daß sich für jede Drehmatrix R ein $\alpha \in \text{SU}(2)$ finden läßt, so dass $R = h(\alpha)$. h wird oft als (doppelte) Überlagerung bezeichnet, $\text{SU}(2)$ entsprechend als Überlagerungsgruppe von $\text{SO}(3)$.

Wir können nun eine Darstellung von $\text{SU}(2)$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_{1/2}$ der Spin-1/2-Teilchen

$$D_{1/2} : \text{SU}(2) \rightarrow \text{Aut } \mathcal{H}_{1/2} \quad (10)$$

definieren durch

$$(D_{1/2}(\alpha)\chi)(\vec{x}) = \alpha\chi(h^{-1}(\alpha)\vec{x}) = \alpha\chi(R^{-1}\vec{x}). \quad (11)$$

(f) Überprüfen Sie, daß es sich hierbei um eine unitäre Darstellung handelt.

Schließlich induziert diese Darstellung der Überlagerungsgruppe $\text{SU}(2)$ eine *Strahldarstellung* der Drehgruppe $\text{SO}(3)$ auf $\mathcal{H}_{1/2}$. Dazu wählt man zu jeder Drehung $R \in \text{SO}(3)$ zunächst einen — wie wir gesehen haben: nicht eindeutigen — Repräsentanten $\alpha \in \text{SU}(2)$, für den $R = h(\alpha)$. Danach kann obige Darstellung der $\text{SU}(2)$ verwendet werden.

S 23 Klein-Gordon-Gleichung bei elektrischem Potential (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß in Anwesenheit eines elektrostatischen Potentials V die erhaltene Dichte und der erhaltene Strom der Klein-Gordon-Gleichung gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\rho &= i\hbar \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) - 2eV \phi^* \phi \\ \vec{J} &= -i\hbar c^2 (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) .\end{aligned}\tag{12}$$

Hinweis: Überprüfen Sie, daß diese die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html>