Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

1. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 26.10.2007
Besprechung der Präsenzaufgaben: 29.10.2007

Schriftlich zu bearbeitende Aufgaben sind mit einem S gekennzeichnet, Präsenzaufgaben mit einem P.

P 1 Endliche Kernausdehnung und atomare Energieniveaus (5 Punkte)

Der Atomkern werde als homogen geladene Kugel der Gesamtladung Ze_0 mit Radius R aufgefaßt. Das Elektron bewegt sich dann im Potential

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze_0^2}{R}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] & \text{für } r \leq R \\ -\frac{Ze_0^2}{r} & \text{für } R < r \end{cases} \tag{1}$$

Behandeln Sie die *Abweichung* des Potentials $V(r)$ vom Coulomb–Potential eines punktförmigen Kerns als Störung und berechnen Sie in Störungsrechnung 1. Ordnung die Energieverschiebung des 1s-Zustands in Abhängigkeit vom Bohrschen Radius a und vom Kernradius R. Dabei können Sie annehmen, daß $R \ll a$. Wie groß ist die Energieverschiebung des Grundzustands beim Wasserstoff ($Z = 1$, $R = 1.2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$)?

Hinweis:

Die Wellenfunktion des 1s-Zustands im Coulomb–Potential ist (im Ortsraum)

$$\psi_{100}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a}} \tag{2}$$

mit dem Bohrschen Radius $a = \hbar^2/(me_0^2) = 0.5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Beachten Sie, daß $e^{-r/a} \simeq 1$ für $r \leq R \ll a$.

S/P 2 Anharmonischer Oszillator

Der eindimensionale anharmonische Oszillator ist gegeben durch den Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + W(x)\,, \tag{3}$$

worin $W(x)$ ein Polynom in x ist.

(a) (schriftlich) (10 Punkte)

Berechnen Sie für den speziellen Fall ($C \in \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}_+$)

$$W(x) = Cx^3 + Dx^4 \tag{4}$$

die Energieverschiebung der Niveaus des harmonischen Oszillators in Störungstheorie 1. Ordnung. Bleibt das Spektrum unter Einfluß der Störung äquidistant?

Hinweis: Drücken Sie die Störung mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren $\mathbf{A}^\dagger$ und $\mathbf{A}$ aus. Beachten Sie, daß der Erwartungswert eines Produkts dieser Operatoren in einem reinen Zustand des ungestörten harmonischen Oszillators nur dann nicht verschwindet, wenn in dem Produkt gleich viele Auf- und Absteigeoperatoren auftreten. Alle relevanten Erwartungswerte lassen sich durch $\mathbf{N} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ ausdrücken.

(b) (Präsenzaufgabe) (5 Punkte)

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{5}$$

mit der kleinen Störung ($\epsilon \ll 1$)

$$\mathbf{W} = W(x) = \frac{1}{2}\epsilon m\omega^2 x^2\,. \tag{6}$$

Geben Sie zunächst die exakte Lösung an und entwickeln sie die Energieeigenwerte in eine Potenzreihe in ϵ. Berechnen Sie dann die Energieverschiebung in Störungstheorie bis zur 2. Ordnung und vergleichen Sie mit dem ersten Ergebnis.

Hinweis: Beachten Sie, daß in 2. Ordnung nur zwei andere Niveaus zur Energieverschiebung des n-ten Niveaus beitragen (welche?).

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html