Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
H. G. Dosch — Sommersemester 2001

1. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe: 2. Mai in der Vorlesung

Hausübungen sind mit H gekennzeichnet, Präsenzübungen mit P.

H 1 Lineare Algebra in endlicher Dimension (5 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum und sei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, d. h. für $f, g, h \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle f \mid g \rangle = \langle g \mid f \rangle^* \tag{1}$$
$$\langle f \mid \alpha g + \beta h \rangle = \alpha \langle f \mid g \rangle + \beta \langle f \mid h \rangle \tag{2}$$
$$\langle f \mid f \rangle \geq 0 \text{ und } \langle f \mid f \rangle = 0 \text{ nur wenn } f = 0\,. \tag{3}$$

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V.

(a) Was ist $\langle e_i \mid e_j \rangle$? Wie wird sinnvoll $|e_i\rangle \langle e_i|$ definiert? Was ist $(|e_i\rangle \langle e_i|)^2$ und welche Bedeutung hat demzufolge $|e_i\rangle \langle e_i|$?

(b) Zeigen Sie: Die Entwicklungskoeffizienten eines beliebigen Vektors $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, sind gegeben durch $c_i = \langle e_i \mid x \rangle$ und es gilt $\langle x \mid x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i^* c_i$. Außerdem gilt die Vollständigkeitsrelation $\sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbf{1}$.

Sei nun $\mathbf{A} : V \to V$ eine lineare Abbildung. Die Exponentialabbildung einer Matrix kann mit Hilfe der Reihendarstellung definiert werden:

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \ldots\,. \tag{4}$$

(c) Zeigen Sie: Hat $\mathbf{A}$ bezüglich $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Matrix (a_{ik}), so hat die hermitesch adjungierte Abbildung $\mathbf{A}^\dagger$ die Matrixelemente $(\mathbf{A}^\dagger)_{ik} = a_{ki}^*$.

(d) Berechnen Sie $\exp(B\boldsymbol{\sigma}_z)$ mit $\boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B \in \mathbb{R}$.

H 2 Lineare Algebra im Hilbertraum (5 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(a) Sei eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{H}$ gegeben. Gewinnen Sie hieraus durch Polarisieren das zugeordnete Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, für welches gilt $\|f\|^2 = \langle f \mid f \rangle$.
Hinweis: Betrachten Sie $\|f+g\|^2$, $\|f-g\|^2$, $\|f+ig\|^2$, $\|f-ig\|^2$ und konstruieren Sie daraus $\langle f \mid g \rangle$.

Sei nun $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, d. h. es gelten (1)–(3) aus Aufgabe H1.

(b) Zeigen Sie, daß für $f, g, h \in \mathcal{H}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle \alpha f + \beta g \mid h \rangle = \alpha^* \langle f \mid h \rangle + \beta^* \langle g \mid h \rangle \tag{5}$$

Die Exponentialabbildung eines linearen Operators auf einem allgemeinen Hilbertraum kann wie in endlicher Dimension (siehe (4) in Aufg. H1) mit Hilfe der Reihendarstellung definiert werden.

(c) Zeigen Sie: Ist $\mathbf{A}$ selbstadjungiert, so ist $\exp(i\mathbf{A})$ unitär.

H 3 Fourier-Transformation (5 Punkte)

Die Fourier–Transformation einer Funktion $\phi(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\hat{\phi}(k) = \mathcal{F}[\phi(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \phi(x)\,. \tag{6}$$

Die inverse Transformation ist dann

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \hat{\phi}(k)\,. \tag{7}$$

Seien $\phi, \psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier–Transformation:

$$\begin{array}{ll}
(a) & \mathcal{F}[\alpha\phi(x) + \beta\psi(x); k] = \alpha\mathcal{F}[\phi(x); k] + \beta\mathcal{F}[\psi(x); k] \\
(b) & \mathcal{F}[\phi(x-a); k] = e^{-ika}\mathcal{F}[\phi(x); k] \\
(c) & \mathcal{F}[\phi(ax); k] = a^{-1}\mathcal{F}[\phi(x); k/a],\ a > 0 \\
(d) & \mathcal{F}[\phi(-x); k] = \mathcal{F}[\phi(x); -k]
\end{array}$$

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qmueb01.html
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼dosch/qm01.html