Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, T. K. Herbst

Universität Heidelberg
Sommersemester 2015

5. Übung zur Quantenmechanik

Besprechung der Präsenzaufgaben: **Fr., 15.5.2015**
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: **Di., 19.5.2015**

P 16 Statistischer Operator (+ 5 Punkte)

Wir betrachten ein Zwei-Zustand-System mit Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$ ist

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Der Zustand $|\psi_\alpha\rangle$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sei gegeben durch

$$|\psi_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\alpha} |+\rangle + e^{i\beta} |-\rangle \right) \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass der statistische Operator zum reinen Zustand $|\psi_\alpha\rangle$ gegeben ist durch

$$\boldsymbol{\rho}(\psi_\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i(\alpha-\beta)} \\ e^{i(\beta-\alpha)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Hinweis: Es gilt (warum?)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (c, d) = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}. \tag{4}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\rho}(\psi_\alpha)] = 1$ und $\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\rho}^2(\psi_\alpha)] = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass für den gemischten Zustand

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{gem}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\rho}(\psi_\alpha)\, d\alpha \tag{5}$$

zwar wieder $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\rho}_{\text{gem}} = 1$, aber $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\rho}^2_{\text{gem}} < 1$ gilt.

S 17 Gaußsches Wellenpaket (7 Punkte)

Wir wollen ein freies Teilchen in einer Dimension betrachten. Zu einem festen Zeitpunkt (z. B. $t = 0$) sei der Zustand $\psi(x)$ gegeben durch

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}\, \phi(k), \quad \text{mit} \quad \phi(k) = A e^{-a^2 k^2}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}$ so, dass $\langle \phi \,|\phi\rangle = 1$.
Seien $\mathbf{Q}$ der Orts- und $\mathbf{P}$ der Impulsoperator. Berechnen Sie für obigen Zustand die Erwartungswerte $\langle \mathbf{Q} \rangle$, $\langle \mathbf{Q}^2 \rangle$, $\langle \mathbf{P} \rangle$, $\langle \mathbf{P}^2 \rangle$, und das Schwankungsprodukt $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$, wobei allgemein $(\Delta\mathbf{A}) = \sqrt{(\Delta\mathbf{A})^2}$. Vergleichen Sie mit der in Aufg. 5 hergeleiteten Unschärferelation.

Hinweis: Es gilt für $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \tag{7}$$

und weitere nützliche Integrale können hieraus durch Ableiten nach λ gewonnen werden.

S 18 Ehrenfest-Theorem (6 Punkte)

Sei $\psi_t(\vec{x}) = \psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung im Ortsraum. Der Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\,, \tag{8}$$

und ψ_t sei normiert, $\langle \psi_t \,| \psi_t \rangle = 1$. Wir bezeichnen die Erwartungswerte von Orts– und Impulsoperator im Zustand $\psi_t(\vec{x})$ mit

$$\vec{X}(t) = \langle \vec{\mathbf{Q}} \rangle(t) = \langle \psi_t | \vec{\mathbf{Q}}\, \psi_t \rangle \quad \text{und} \quad \vec{P}(t) = \langle \vec{\mathbf{P}} \rangle(t) = \langle \psi_t | \vec{\mathbf{P}}\, \psi_t \rangle\,. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass diese Erwartungswerte die folgenden Bewegungsgleichungen (die Ehrenfestschen Gleichungen) erfüllen:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \frac{1}{m}\vec{P}(t)\,, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = -\langle \psi_t \,| (\nabla V(\vec{x}))\, \psi_t \rangle\,. \tag{11}$$

Hinweis:
Leiten Sie zunächst für einen selbstadjungierten und im Allgemeinen zeitabhängigen Operator $\mathbf{A}$ die Relation

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [\mathbf{A}, \mathbf{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\rangle \tag{12}$$

aus der Vorlesung her. Zum Beweis von Gl. (10) zeigen Sie dann weiter die Relation $\left[\mathbf{C}, \mathbf{D}^2\right] = \mathbf{D}\,[\mathbf{C}, \mathbf{D}] + [\mathbf{C}, \mathbf{D}]\,\mathbf{D}$ für zwei Operatoren $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$.

S 19 Harmonischer Oszillator (7 Punkte)

Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator. Der Absteigeoperator $\mathbf{A}$ ist definiert als (vgl. Vorlesung)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{Q}} + i\hat{\mathbf{P}}\right), \qquad \text{mit} \qquad \hat{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{b}\,, \quad \hat{\mathbf{P}} = \frac{b}{\hbar}\mathbf{P} \tag{13}$$

mit $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, der Masse m und einer Konstanten ω. Außerdem definiert man $\mathbf{N} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$. Der Hamiltonoperator ist dann

$$\mathbf{H} = \hbar\omega\left(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1}\right)\,. \tag{14}$$

Die normierten Eigenzustände von $\mathbf{N}$ zu den Eigenwerten $\nu \in \mathbb{N}$ seien $|\psi_\nu\rangle$.

(a) Berechnen Sie $[\mathbf{N}, \mathbf{A}]$ und $\left[\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger\right]$.

(b) Zeigen Sie, dass $\quad \mathbf{A}^\dagger\,|\psi_\nu\rangle = \sqrt{\nu+1}\,|\psi_{\nu+1}\rangle \quad$ und $\quad \left(\mathbf{A}^\dagger\right)^n|\psi_0\rangle = \sqrt{n!}\,|\psi_n\rangle\,.$

(c) Zeigen Sie, dass $\quad \langle \psi_n \,| \mathbf{Q}\psi_n \rangle = 0 \quad$ sowie $\quad \langle \psi_n \,| \mathbf{P}\psi_n \rangle = 0$
und berechnen Sie das Schwankungsprodukt $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$ im reinen Zustand $|\psi_n\rangle$.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm15.html