Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, C. Viermann

Universität Heidelberg
Wintersemester 2016/17

3. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 07.–09.11.2016
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 10.11.2016

S/P 8 Laplace-Operator in sphärischen Polarkoordinaten

(S optional, +10/+3 Punkte)

S(a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in sphärischen Polarkoordinaten (r, φ, θ) mit $\boldsymbol{x} = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$ gegeben ist durch

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega \tag{1}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega\,, \tag{2}$$

worin

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]. \tag{3}$$

Hinweis: Eine (wenn auch nicht die eleganteste) Möglichkeit ist die Benutzung der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\theta}\,. \tag{4}$$

P(b) Berechnen Sie $\Delta\, r^m$ für $m \in \mathbb{Z}$. Für welche m ist das Ergebnis Null?

P(c) Zeigen Sie

$$\Delta\,\frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})\,. \tag{5}$$

S 9 Greensche Funktion der Helmholtz- und der Poisson-Gleichung

(6 Punkte)

(a) Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\boldsymbol{x}) = -4\pi\rho(\boldsymbol{x})\,, \tag{6}$$

worin $k \in \mathbb{R}$ sei.

Zeigen Sie, dass mit $r = |\boldsymbol{x}|$

$$G_\pm(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{\pm ikr}}{r} \tag{7}$$

Greensche Funktionen der Helmholtz-Gleichung sind, d. h.

$$(\Delta + k^2)\, G_\pm(\boldsymbol{x}) = -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})\,. \tag{8}$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \tag{9}$$

Greensche Funktion der Poisson-Gleichung $\Delta\phi = -4\pi\rho(\boldsymbol{x})$ ist, d. h.

$$\Delta G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\,. \tag{10}$$

P 10 Kugelsymmetrische Ladungsverteilung (+2 Punkte)

Eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{x}) = \rho(r)$ (wie immer $r = |\boldsymbol{x}|$) erzeugt ein radiales elektrisches Feld (Warum?)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = f(r)\, \frac{\boldsymbol{x}}{r}\,. \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass der Betrag des Feldes durch

$$f(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(\boldsymbol{x}') r'^2 dr' = \frac{Q(r)}{r^2} \tag{12}$$

gegeben ist. Welche Bedeutung hat $Q(r)$? Was ist die physikalische Aussage dieser Gleichung?

S 11 Klassischer Elektronradius (4 Punkte)

Berechnen Sie die Selbstenergie eines Elektrons unter der Annahme, dass die Ladung des Elektrons

(i) gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche vom Radius R_e verteilt ist;

(ii) gleichmäßig auf einer Kugel vom Radius R_e verteilt ist.

Nehmen Sie weiter an, dass die Ruheenergie $m_e c^2$ des Elektrons allein aus der elektrostatischen Selbstenergie resultiert. Bestimmen Sie hieraus die für obige Fälle resultierenden Radien R_e. Als *klassischen Elektronradius* bezeichnet man üblicherweise $r_0 = e^2/(m_e c^2)$.
Bemerkung: Alle obigen Annahmen sind natürlich falsch.
Hinweis: Im Gaußschen Einheitensystem ist $e = 4.802 \cdot 10^{-10}\sqrt{\text{dyn}}\,\text{cm}$, $m_e = 9.109 \cdot 10^{-28}\,\text{g}$, $c = 2.998 \cdot 10^{10}$ cm/s. Dabei ist 1 dyn $= 10^{-5}$ N.

S 12 Wasserstoffatom I (5 Punkte)

Die durch das Elektron bewirkte mittlere elektrische Ladungsverteilung eines Wasserstoffatoms im Grundzustand ist

$$\rho(\boldsymbol{x}) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) , \tag{13}$$

wobei a der Bohrsche Radius und e die Elementarladung ist.

(a) Geben Sie die Ladungsverteilung des gesamten Wasserstoffatoms an, wenn der Kern als punktförmig betrachtet wird.

(b) Berechnen Sie das durch das Wasserstoffatom erzeugte elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$.

(c) Wie verhält sich das Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ für große Werte von r und für $r \to 0$?

S 13 Vektorpotential für ein homogenes Magnetfeld (5 Punkte)

Wir betrachten ein konstantes, homogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, das entlang der z-Richtung orientiert ist, d. h. $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$ ein Vektorpotential für $\boldsymbol{B}$ ist.

(b) Finden Sie für $\boldsymbol{B}$ ein Vektorpotential $\boldsymbol{A}'$, das in x-Richtung orientiert ist. Geben Sie eine Eichtransformation an, die $\boldsymbol{A}'$ in $\boldsymbol{A}$ überführt.

(c) Zeigen Sie, dass auch $\boldsymbol{A}'' = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{x}$ ein Vektorpotential für $\boldsymbol{B}$ ist. Geben Sie auch hier eine Eichtransformation an, die $\boldsymbol{A}''$ in $\boldsymbol{A}$ überführt.

S 14 Vektorpotential der Magnetostatik (optional, +5 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir den Ansatz $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ gemacht, um das divergenzfreie Vektorfeld $\boldsymbol{B}$ aus seinen Wirbeln

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \tag{14}$$

zu bestimmen. Wir hatten für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ gefunden

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, d^3x' . \tag{15}$$

Überprüfen Sie noch einmal, dass der obige Ansatz allgemein möglich war, indem Sie explizit für dieses $\boldsymbol{A}$ zeigen, dass $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Benutzen Sie dazu (14) und andere geeignete Maßnahmen.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed16.html