Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, C. Viermann

Universität Heidelberg
Wintersemester 2016/17

1. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 24.–26.10.2016
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 27.10.2016

Schriftlich zu bearbeitende Aufgaben sind mit einem S gekennzeichnet, Präsenzaufgaben mit einem P. Die Präsenzaufgaben sollen **vor** den Übungen gelöst werden. Die Punkte für diese Aufgaben gibt es für die Bereitschaft zum Vorrechnen. Es empfiehlt sich, dann auch eine Lösung parat zu haben. (Sonst werden die Punkte wieder abgezogen.)

Dieses Blatt soll Sie mit wichtigen mathematischen Werkzeugen vertraut machen, die Sie auch im weiteren Physikstudium immer wieder brauchen werden.

P 1 Delta-Distribution (+4 Punkte)

Wir betrachten Distributionen in einer Dimension. Beachten Sie, dass diese durch ihre Wirkung auf Testfunktionen beschrieben werden.

(a) Berechnen Sie die zweite Ableitung von $x\theta(x)$.

(b) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)\,. \tag{1}$$

(c) Zeigen Sie für eine Funktion $f(x)$ mit endlich vielen einfachen Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$:

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_i)|}\,\delta(x - x_i)\,. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie dies hier nur für den Fall einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f(x)$, indem Sie Intervalle um die Nullstellen betrachten und dort $f(x)$ in eine Taylorreihe entwickeln.

(d) Zeigen Sie, dass die Delta-Funktion mittels

$$\lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x - x_0) = \delta(x - x_0) \tag{3}$$

dargestellt werden kann, wenn

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} (2\epsilon)^{-1} & \text{für } |x| \le \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass sie auch eine Darstellung mittels der Gaußkurve besitzt, d. h.

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right] = \delta(x - x_0)\,. \tag{5}$$

P/S 2 Vektoranalysis I

(+2 Punkte, 6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, in denen $r = |\boldsymbol{x}|$, $f(r)$ eine differenzierbare Funktion und $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor ist:

P(a) $\operatorname{grad} r^2$, $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{div} \boldsymbol{x}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{x}$

S(b) $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x})$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x})$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x})$, $\operatorname{grad} 1/r$, $\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{c}}{r}$.

P/S 3 Integration von Vektorfeldern

(+4 Punkte, 4 Punkte)

P(a) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ das Flächenintegral

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} \,, \tag{6}$$

wobei die Fläche $\mathcal{F}$ die Halbsphäre mit $\boldsymbol{x}^2 = 1, x_3 \geq 0$ sein soll. Parametrisieren Sie hierfür zunächst die Oberfläche, um dann $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ zu bestimmen.

Berechnen Sie weiter das Linienintegral

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \,, \tag{7}$$

wobei der Weg $\mathcal{C}$ die positiv orientierte Kreislinie $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0$ ist. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für dieses Integral.

S(b) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = (3x_3, x_1^2 + x_2^2, x_1 x_3)$. Das zweidimensionale Flächenstück $\mathcal{F}$ im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3) |\, x_3 = x_1 x_2 \text{ mit } |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\} \,. \tag{8}$$

Es sei so orientiert, dass im Ursprung $(0, 0, 1)$ positiv orientierter Normalenvektor ist. Berechnen Sie

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} \,. \tag{9}$$

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed16.html