Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, A. Samberg

Universität Heidelberg
Wintersemester 2013/14

8. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 09.–11.12.2013
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 12.12.2013

S 37 Zur Wellengleichung (5 Punkte)

Wir wollen die freie Wellengleichung betrachten,

$$\Box\, \psi(\boldsymbol{x}, t) = 0\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\psi_1(\boldsymbol{x}, t) = f(x_1 - ct)$ und $\psi_2(\boldsymbol{x}, t) = g(x_1 + ct)$ mit zwei beliebigen (zweimal differenzierbaren) Funktionen f und g Lösungen der homogenen Wellengleichung sind. Skizzieren Sie das zeitliche Verhalten von ψ_1 und ψ_2 entlang der x_1-Achse.

(b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Existenz solcher Lösungen und der allgemeinen Lösung der freien Wellengleichung durch ebene Wellen? Welche Rolle spielt die Relation $\omega = c\,|\boldsymbol{k}|$ dabei?

(c) Konstruieren Sie mit geeigneten f und g *stehende* Wellen, d. h. Lösungen ψ mit $\mathrm{Re}\,\psi(x_1, t) = \phi(x_1)\chi(t)$ mit reellwertigen Funktionen ϕ und χ.

P 38 Ebene Welle (+3 Punkte)

Betrachten Sie die ebene Welle

$$\boldsymbol{E} = (A\boldsymbol{e_1} + B\boldsymbol{e_2} + C\boldsymbol{e_3})\, e^{i(kx_3 - \omega t)}\,, \tag{2}$$

wobei $\omega = ck$ mit $k > 0$ gelte und $A, B, C \in \mathbb{C}$ beliebige komplexe Zahlen seien.

(a) Welche Bedingung für A, B, C muss erfüllt sein, damit der Realteil von $\boldsymbol{E}$ eine elektromagnetische Welle im Vakuum darstellt?

(b) Unter welchen Bedingungen für A, B, C ist diese elektromagnetische Welle linear polarisiert?

S 39 Polarisation ebener Wellen (8 + 8 Punkte)

Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle, die sich in x_3-Richtung ausbreitet, d. h. $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{e_3}$. Dazu schreiben wir mit reellen Konstanten E_1, E_2 und $k > 0$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \left(\boldsymbol{e_1} E_1 e^{i\varphi_1} + \boldsymbol{e_2} E_2 e^{i\varphi_2}\right) e^{i(kx_3 - \omega t)}\,. \tag{3}$$

Das elektrische Feld ist dann gegeben durch den Realteil $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{E}$.

(a) Zeigen Sie für den Fall $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$, dass für festes $\boldsymbol{x}$ der Vektor $\operatorname{Re} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ eine Ellipse umläuft und geben Sie deren Halbachsen an.

(b) Wodurch sind die Spezialfälle linkszirkularer Polarisation und linearer Polarisation gekennzeichnet? Was sind in diesen Fällen die Halbachsen der Ellipse?

(c) Fertigen Sie für den allgemeinen Fall elliptischer Polarisation (beliebiges δ) eine Skizze für $\operatorname{Re} \boldsymbol{E}$ an, in der Sie verschiedene geeignete t kennzeichnen.

(d) (optional, +8 Punkte)
Zeigen Sie für allgemeine φ_1 und φ_2, dass der Vektor $\operatorname{Re} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ eine Ellipse umläuft. Bestimmen Sie die Hauptachsen der Ellipse für diesen Fall allgemeiner elliptischer Polarisation.

Hinweis: Versuchen Sie zum Beispiel, mit Hilfe geeigneter trigonometrischer Additionstheoreme $\operatorname{Re} \boldsymbol{E} = A \cdot \boldsymbol{e}$ mit einer Matrix A und einem Vektorfeld $\boldsymbol{e}$ zu schreiben. Dabei kann es günstig sein, wenn $\boldsymbol{e}$ normiert ist. Ziel ist es, $\operatorname{Re} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ in Hauptachsenform auszudrücken:

$$p\boldsymbol{e_1}' E_1' \cos(kx_3 - \omega t + \alpha) + \boldsymbol{e_2}' E_2' \sin(kx_3 - \omega t + \alpha)\,, \tag{4}$$

mit einem gegenüber $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ gedrehten Koordinatensystem $(\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}')$.

S 40 Felder retardierter Potentiale (4 Punkte)

Berechnen Sie aus den retardierten elektromagnetischen Potentialen in der Lorenz-Eichung,

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}', t'_{\text{ret}})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x' \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}', t'_{\text{ret}})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x' \tag{6}$$

mit $t'_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$, die Größen $-\nabla\varphi$, $-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, und damit das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$.

S 41 Elektromagnetische Dualität im Vakuum (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Maxwell-Gleichungen im ladungs- und stromfreien Raum invariant sind unter der *Dualitätstransformation*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' &= \cos(\theta)\boldsymbol{E} - \sin(\theta)\boldsymbol{B}\,, \\ \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}' &= \sin(\theta)\boldsymbol{E} + \cos(\theta)\boldsymbol{B}\,, \end{aligned} \tag{7}$$

worin $0 \leq \theta < 2\pi$ ein beliebiger Winkel sei.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed13.html