
7. ÜBUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK

Besprechung der Präsenzaufgaben: 02.–04.12.2013
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 05.12.2013

S 32 Magnetfeld rotierender Kugel (5 Punkte)

Eine homogen geladene Kugel vom Radius R mit Gesamtladung Q rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch ihren Mittelpunkt. Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment der Kugel. Bestimmen Sie die magnetische Induktion \mathbf{B} in großer Entfernung von der Kugel.

S 33 Helmholtz-Spulen: Kraft auf Dipol (5 Punkte)

In der 1-2-Ebene befinde sich mit Mittelpunkt im Ursprung ein Ring mit Radius R aus Draht von vernachlässigbarem Querschnitt, in dem ein Strom der Stärke I fließt. Parallel dazu sei in der Ebene $x_3 = a$ ein zweiter Draht gleicher Form und Größe angebracht, in dem ebenfalls ein Strom der Stärke I in derselben Richtung fließt.

- Berechnen Sie die magnetische Induktion im Punkt $(0, 0, a/2)$ in der Mitte zwischen den Ringen.
- Wie groß muss man a wählen, damit das Feld in der Mitte möglichst homogen wird?
- Bestimmen Sie die Kraft $\mathbf{K}(a)$ auf ein in der Mitte befindliches magnetisches Dipolmoment $\mathbf{m} = m \mathbf{e}_3$ für den Fall, dass die Ringe *gegensinnig* vom Strom durchflossen werden.
- Zeigen Sie, dass $|\mathbf{K}(a)|$ für das in (b) bestimmte a maximal ist.

P 34 Wellengleichungen für das elektromagnetische Feld (+3 Punkte)

Leiten Sie direkt aus den Maxwell-Gleichungen (also ohne Verwendung der elektromagnetischen Potentiale) her, dass \mathbf{E} und \mathbf{B} im ladungs- und stromfreien Raum (d. h. für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$) Wellengleichungen erfüllen.

S 35 Nützliches zur Lösung der Wellengleichung (5 Punkte)

Bei der allgemeinen Lösung der freien Wellengleichung tritt die Funktion

$$D(\mathbf{x}, t) = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}) \quad (1)$$

auf, wobei $\omega_0 = ck$ und $k = |\mathbf{k}|$. Zeigen Sie, dass

$$D(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2\pi c} \epsilon(t) \delta(r^2 - c^2 t^2), \quad (2)$$

worin $r = |\mathbf{x}|$ und

$$\epsilon(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Hinweis: Schreiben Sie \mathbf{k} in Kugelkoordinaten und zeigen Sie zunächst

$$D(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi cr} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)]. \quad (4)$$

Führen Sie dann eine Fallunterscheidung für $t < 0$, $t = 0$ bzw. $t > 0$ durch.

S 36 Freie elektromagnetische Kugelwellen

(5 Punkte)

Das elektrische Feld \mathbf{E} und die magnetische Induktion \mathbf{B} erfüllen im ladungs- und stromfreien Raum die freie Wellengleichung (vgl. Aufg. 34). Die freie Wellengleichung kann auch durch Kugelwellen gelöst werden, so dass dann eine monochromatische Lösung der Maxwell-Gleichungen gefunden werden kann von der Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}, \quad (6)$$

wobei \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 die Winkelabhängigkeit enthalten, aber von r unabhängig sind. Aus der Wellengleichung folgt $\omega = ck$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, dass diese Wellen transversal sind, d. h. dass $\mathbf{E} \perp \mathbf{e}_r$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{e}_r$, und $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

Hinweis: Für obige Kugelwellen ist eine Seite der Maxwell-Gleichung $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}$ leichter zu berechnen als die andere.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed13.html>