Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, A. Samberg

Universität Heidelberg
Wintersemester 2013/14

11. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 13.–15.01.2014
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 16.01.2014

P 54 Euler–Lagrange-Gleichungen für ein geladenes Teilchen (+4 Punkte)

Die Wirkung für ein Teilchen mit der Ladung q in einem äußeren elektromagnetischen Feld mit Potentialen $\varphi(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t), t) - q\varphi(\boldsymbol{x}(t), t) \right) , \quad (1)$$

wobei $\boldsymbol{x}(t)$ die Trajektorie des Teilchens sei und $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ gelte.

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Euler–Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichung des Teilchens, ausgedrückt durch die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$, her.

(b) Betrachten Sie eine Eichtransformation

$$\varphi \longrightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} , \qquad \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \chi \, . \quad (2)$$

Berechnen Sie die Änderung (!) der Wirkung unter dieser Eichtransformation und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung unverändert bleibt.

S 55 Horizonte: Hyperbolische Bewegung (6 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ sollen zwei positiv geladene Körper (Ladungen q, Ruhemassen m_0) im Abstand $a = \frac{m_0 c^2}{2\pi\sigma q}$ rechts bzw. links einer unendlich ausgedehnten, dünnen ebenen Platte in der x-y-Ebene mit homogener positiver Flächenladungsdichte σ ruhen.

(a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$F = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

und zeigen Sie, dass sich die Körper zur Zeit t an den Orten

$$z(t) = \pm\, a \sqrt{1 + \frac{c^2 t^2}{a^2}} \quad (4)$$

befinden. Vernachlässigen Sie dabei die Wechselwirkung der beiden Ladungen untereinander.

(b) Zeigen Sie, dass von einem Körper ausgehendes Licht den anderen Körper nie erreichen kann. Mitfliegende Beobachter können sich daher nicht sehen, besitzen also einen Horizont.

S 56 Lichtstrahlen einer bewegten Quelle (optional, +5 Punkte)

Untersuchen Sie die räumliche Verteilung der Lichtstrahlen einer in ihrem Ruhesystem isotrop abstrahlenden Punktlichtquelle, während sie sich mit konstanter hoher Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt. Drücken Sie dazu den Tangens des Winkels ϕ zwischen dem Dreiervektoranteil $\boldsymbol{k}$ des Wellenzahlvierervektors k^μ einer ausgestrahlten elektromagnetischen Welle und der Bewegungsrichtung (der Quelle) im Laborsystem durch den entsprechenden Winkel ϕ_0 im Ruhesystem aus. Werten Sie das Ergebnis z. B. für $\beta = 3/5$ und $\phi_0 = \pi/2$ aus. Fertigen Sie eine Skizze an und kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

S 57 Punktladung vor Dielektrikum (8 Punkte)

Der gesamte Raum sei mit zwei homogenen isotropen Dielektrika der Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 gefüllt: ε_1 für $x > 0$ und ε_2 für $x < 0$. Außerdem befinde sich eine Punktladung q bei $(a, 0, 0)$ mit $a > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential durch den Ansatz

$$x > 0: \qquad \varphi_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{q}{|\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{e_1}|} - \frac{q'}{|\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{e_1}|}\right) \tag{5}$$

$$x < 0: \qquad \varphi_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{q''}{|\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{e_1}|} \tag{6}$$

dargestellt werden kann. Bestimmen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche die Konstanten b, q' und q'' und berechnen Sie das elektrische Feld.

Bemerkung: Beachten Sie die Ähnlichkeit dieses Ansatzes mit dem, den man mittels Spiegelladungen für eine metallische Grenzfläche erhält.

(b) Betrachten Sie die beiden Grenzfälle $\varepsilon_2 \to \infty$ und $\varepsilon_2 \to 0$. Was ist die physikalische Bedeutung dieser beiden Grenzfälle? Was erhält man für $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$?

(c) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien für die Fälle $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ und $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

(d) Berechnen Sie die Polarisationsladungsdichte auf der Grenzfläche $x = 0$.

S 58 Hohlraumstrahlung (6 Punkte)

Wir wollen zeigen, dass im Inneren eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder existieren können. Die Oberflächen des Quaders sollen aus (ideal) leitendem Material bestehen, und im Quader sollen keine Ladungen und Ströme vorhanden sein. Benutzen Sie dazu den Ansatz

$$E_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = E_\alpha^0 \cos(k_\alpha x_\alpha)\sin(k_\beta x_\beta)\sin(k_\gamma x_\gamma)\, e^{-i\omega t} \tag{7}$$

mit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}$.
Welche Einschränkungen an $\boldsymbol{E}$ folgen aus den Maxwell-Gleichungen und den Randbedingungen? Wie lautet $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$? Welches ist die kleinstmögliche Frequenz, so dass $\boldsymbol{E} \neq 0$?
Hinweis: Beachten Sie, dass die Tangentialkomponente von $\boldsymbol{E}$ auf den Oberflächen des Quaders verschwindet.

S 59 Dielektrische Kugel im homogenen Feld (optional, +15 Punkte)

In ein unendlich ausgedehntes dielektrisches Medium der Dielektrizitätskonstanten ε_a, in dem ein homogenes elektrisches Feld $E_0 \boldsymbol{e_3}$ herrscht, werde eine elektrisch neutrale Kugel aus homogenem dielektrischen Material mit ε_i gebracht.

(a) Berechnen Sie das Potential $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ innerhalb und $\varphi_a(\boldsymbol{x})$ außerhalb der Kugel aus Ansätzen der Form

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \tag{8}$$

mit den Legendre-Polynomen P_l.

(b) Bestimmen Sie daraus die Feldstärke und die Polarisation innen und außen.

(c) Wie groß ist die auf der Kugeloberfläche sitzende Polarisationsladungsdichte σ und das Dipolmoment $\boldsymbol{d}$ der Kugel?

(d) Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse und beachten Sie dabei auch den Fall $\varepsilon_i < \varepsilon_a$, speziell $\varepsilon_i = 1$, und den Grenzfall $\varepsilon_i \to \infty$.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed13.html