

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Die heroische Zeit | 2 |
| 2 | Der grosse Schritt vorwärts | 14 |
| 3 | Der Versuch, sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen | 16 |
| 5 | Auf dem Weg zum Standardmodell | 20 |
| 6 | Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik | 27 |
| 7 | Dunkle Wolken oder Morgenröte einer neuen Physik? | 31 |

Kapitel 1

Die heroische Zeit

Ich benutze im Anhang meist die natürlichen Einheiten, also $\hbar = c = 1$.

Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt ist mit der Energie immer die Energie einschliesslich der Ruhenergie gemeint.

1.2 Die Heile Welt

Zur Bestimmung von e/m wird die Coulomb-Kraft des Elektrischen Feldes E und die Lorentz-Kraft des Magnetfeldes B benutzt: S.8

Coulomb-Kraft: $K = eE$ in Richtung des E-Feldes

Lorentz-Kraft: $K = e \frac{v}{c} B$, senkrecht auf Richtungen von v und B .

v ist die Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, c wie immer die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

•Die Rutherford'sche Streuformel für Teilchen der Masse m , der Ladung e und der Geschwindigkeit v ($v \ll c$) an einem sehr schweren Kern lautet der Ladung Ze : S.9f

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (1.1)$$

wobei θ der Streuwinkel ist.

1.3 Kontrolle ist besser

Der Energieverlust eines geladenen Teilchens der Ladung e und Geschwindigkeit v durch S.17ff

Ionisation pro Längeneinheit ist nach halbklassischen Überlegungen gegeben durch:

$$\frac{dE}{dx} \approx 4\pi NZ \frac{e^4}{mv^2} \ln B; \quad B = \frac{mv^3}{(1 - v^2/c^2)e^2\omega} \quad (1.2)$$

Hierbei ist NZ die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit des ionisierten Materials, ω eine für das Material typische Frequenz, $\hbar\omega$ ist ungefähr die Ionisierungsenergie.

Für kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c$) gilt also

$$\frac{dE}{dx} \approx 4\pi NZ \frac{e^4}{mv^2} \ln B; \quad B = \frac{mv^3}{e^2\omega} \quad (1.3)$$

d.h. die Ionisierungsdichte ist umgekehrt proportional der kinetischen Energie. Kennt man den Impuls, z.B. aus der Krümmung der Teilchenbahn im Magnetfeld, so kann aus Energie und Impuls die Masse bestimmt werden.

Für grosse Geschwindigkeiten ($v \approx c$) gilt:

$$\frac{dE}{dx} \approx 4\pi NZ \frac{e^4}{mc^2} \ln B; \quad B = \frac{E^2}{mce^2\omega} \quad (1.4)$$

wobei benutzt wurde dass die Gesamtenergie E des ionisierenden Teilchens gegeben ist durch $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (s. 1.4.1). Hier ist also die Energieabhängigkeit nur schwach, nämlich logarithmisch.

1.4.1 Spezielle Relativitätstheorie und Quantenphysik

Was die gewöhnlichen 3-Vektoren für den Raum sind, sind die 4-Vektoren für das Raum-Zeit-Kontinuum: S.22f

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \quad (1.5)$$

Das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren ist:

$$a \cdot b = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 a_\mu b_\nu g_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

mit dem „metrischen Tensor“ (4×4 -Matrix):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

(Etwas Matrix-Algebra wird ab (1.28) ff erläutert)

Lorentz-Transformationen lassen das 4-dimensionale Skalarprodukt ungeändert, wie Drehungen im Raum das 3-dimensionale.

Energie E und Impuls $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ bilden zusammen einen 4-Vektor:

$$p = (E/c = p_0, p_1, p_2, p_3) \quad (1.8)$$

Ebenso Zeit und Raumkoordinaten:

$$x = (ct = x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (1.9)$$

Das Skalarprodukt von p mit sich selbst ist die Masse mal c^2 :

$$p \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (1.10)$$

Der Zusammenhang zwischen Energie E , 3-Impuls \vec{p} und Geschwindigkeit \vec{v} eines Teilchens mit Masse m ist demnach:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.11)$$

• Die freie Dirac-Gleichung (d.h. ohne elektromagnetische Felder) lautet:

S.23

$$\left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - mc^2 \right) u(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.12)$$

wobei die γ -Matrizen 4×4 -Matrizen mit folgender Eigenschaft sind:

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu + \gamma_\nu \cdot \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

Der Spinor $u(\vec{x}, t)$ hat 4 Komponenten

$$u(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} u_1(\vec{x}, t) \\ u_2(\vec{x}, t) \\ u_3(\vec{x}, t) \\ u_4(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Die Dirac-Gleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld wird in 5.1 (5.5 hergeleitet)

1.4.2 Feldtheorie und Quantenphysik

Für das folgende ist es bequem einzuführen:
den Kommutator

S.29f

$$[A, B] = AB - BA \quad (1.15)$$

und den Antikommutator:

$$[A, B]_+ = AB + BA \quad (1.16)$$

Für die Erzeuger und Vernichter von Teilchen mit ganzzahligem Spin gilt:

$$[a(\vec{x}, t), a^*(\vec{y}, t)] = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad [a(\vec{x}, t), a(\vec{y}, t)] = [a^*(\vec{x}, t), a^*(\vec{y}, t)] = 0 \quad (1.17)$$

Für Fermionen sind die Kommutatoren $[,]$ durch Antikommutatoren $[,]_+$ zu ersetzen.

• Die vollständige Form der Wechselwirkung ist, s. (5.5):

S.31

$$L_{\text{Wechselwirkung}} = e^2 \psi^*(\vec{x}, t) \gamma_0 \left(\gamma_0 A_0(\vec{x}, t) - \sum_{k=1}^3 \gamma_k A_k(\vec{x}, t) \right) \psi(\vec{x}, t) \quad (1.18)$$

wobei A_0 das elektrische und \vec{A} das magnetische (Vektor-) Potential ist, e ist die Ladung des Teilchens.

- Eine innere Linie eines Quantenfeldes (der sog. Propagator) der Masse m gibt Anlass zu einem Faktor: $1/(p^2 - m^2c^2)$, wobei p der von der inneren Linie getragene 4-Impuls ist. S.33ff

Der Austausch eines Teilchens mit der Masse m gibt daher einen Faktor: S.36

$$\frac{1}{(p - p')^2 - m^2c^2} \quad (1.19)$$

wobei p und p' der 4-Impuls vor bzw. nach dem Austausch ist.

Durch Fouriertransformation folgt daraus bei kleinen Geschwindigkeiten (d.h. nichtrelativistisch) für das Wechselwirkungspotential:

$$V(r) = e^{-rmc/\hbar}/r \quad (1.20)$$

mit $r = |\vec{x}|$

Für das Photon (Masse 0) folgt daraus das bekannte Coulomb-Potential, für den Austausch von Mesonen das Yukawa-Potential mit der Reichweite $r_0 = \hbar/(mc)$

Der Faktor $\frac{1}{(p-p')^2}$, der beim Austausch eines Photons auftritt, ist auch Anlass für den Term $1/\sin^4 \frac{\theta}{2}$ bei der Rutherford-Streuung.

- Der Quantenkorrektur von Abb. 1.13a (Selbstenergie) entspricht das divergente Integral: S.37

$$e^2 u^*(p) \gamma^0 \int d^4k \frac{-\gamma \cdot q + m}{(q^2 - m^2)k^2} u(p), \quad q = p - k \quad (1.21)$$

wobei $u(p)$ der Spinor eines Elektrons mit dem 4-Impuls p ist, e ist die Ladung und m die Masse des Elektrons. $\gamma \cdot q$ ist das Skalarprodukt der γ -Matrizen mit dem 4-Impuls $q = p - k$, die Einheiten sind so, dass $\hbar = 1$ und $c = 1$. Der Term $q^2 - m^2$ im Nenner kommt von der inneren (d.h. virtuellen) Elektron-Linie, der Term k^2 von der inneren Photonlinie.

- Thomson hatte schon 1904 den Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Licht an Elektronen mit Hilfe der klassischen Elektrodynamik berechnet. Er hatte natürlich den Fluss nicht als Fluss von Teilchen, sondern als Energiefluss betrachtet. Man kann die beiden aber leicht umrechnen, da ein Photon die Energie $\hbar\omega = h\nu$ hat. S.38

Der Thomsonsche Wirkungsquerschnitt ist:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (1.22)$$

Die Grösse $r_0 = 2.8 \dots \cdot 10^{-15}$ m wird als klassischer Elektronenradius bezeichnet. Eine Ladungsverteilung mit der Ausdehnung r_0 führt zu einer elektrostatischen Energie, die von der Grössenordnung der Ruhenergie des Elektrons, $mc^2 = 0.511 \dots$ MeV, ist.

Die Graphen von Abb. 1.9 führen in der Grenze verschwindenden Photonenimpulses genau zum Wirkungsquerschnitt 1.22, wenn man für die Ladung e die klassische Ladung einsetzt. In diesem Falle tragen also die Quantenkorrekturen nicht bei, sondern erst bei höheren Photon-Impulsen.

1.4.3 Quantenphysik und Fehler

Obwohl die Quantenmechanik eine deterministische Theorie ist, macht sie nur Wahrscheinlichkeitsaussagen, und deshalb werden die Ergebnisse von Messungen i. a. streuen.

S.39

Ganz allgemein gilt: Ist p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses x und liegen insgesamt N Möglichkeiten des Eintretens vor, dann ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messwerte x :

$$W_B(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x} \quad (1.23)$$

Für unser Beispiel: Ist N die Gesamtzahl der instabilen Teilchen und p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen innerhalb einer Sekunde zerfällt, dann ist $W_B(x)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung dafür, dass ich in einer Sekunde x Zerfälle registriere (angenommen, jeder Zerfall bringt meine Messapparatur zum Ansprechen).

Für den wichtigen Spezialfall, dass p sehr klein und N sehr gross ist, geht diese „Binomialverteilung“ über in die „Poisson-Verteilung“:

$$W_B(x) = \frac{N^x p^x}{x!} \quad (1.24)$$

Nahe dem Mittelwert $\bar{x} = pN$ kann man diese Poisson-Verteilung auch durch eine Normal- oder Gauss-Verteilung approximieren:

$$W_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma^2)} \quad (1.25)$$

mit $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$

σ wird als Standardabweichung bezeichnet. Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $2/3$ liegt das aktuelle Messergebnis innerhalb des Bereiches $\bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma$ oder umgekehrt, mit der Wahrscheinlichkeit von $1/3$ liegt die Wahrscheinlichkeit p ausserhalb des Bereiches $(\frac{x+\sigma}{N}, \frac{x-\sigma}{N})$, wobei x der aktuelle gemessene Zahl der eingetretenen Ereignisse (z.B. Zerfälle oder Streueignisse) ist.

Wenn die mit Hilfe der Quantenmechanik exakt berechnete Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis p ist, so werden die Ergebnisse von Messreihen dennoch nach den oben angegebenen Verteilungen streuen. Um aus Messergebnissen auf die Wahrscheinlichkeit p zu schliessen, muss ich die Schwankungen berücksichtigen. Da die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{pN}$ ist, erhalte ich, mit $pN \approx x$:

$$p = \frac{(x \pm \sqrt{x})}{N}. \quad (1.26)$$

Der absolute Standardfehler ist also $\Delta p = \frac{\sqrt{x}}{N}$, der relative Fehler, auf den es i. a. ankommt ist:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{x} \quad (1.27)$$

Dies zeigt, wie der relative Fehler mit der Zahl der gemessenen Ereignisse abnimmt, allerdings leider nur mit der Wurzel. Um eine 100 mal bessere Genauigkeit zu erzielen, brauche ich 10 000 mal mehr Ereignisse.

1.5.1 Symmetrien und Transformationen

Eine Gruppe ist eine Menge G von Elementen, a, b, \dots , für die es eine Verknüpfung ab – S.41ff
i. a. Multiplikation genannt – gibt, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Mit a und b ist auch das Produkt ab wieder Element der Gruppe.
2. Es gibt genau ein Eins-Element mit $1a = a1 = a$ für alle a .
3. Zu jedem Element a gibt es genau ein inverses Element, bezeichnet mit a^{-1} , mit $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.
4. Es gilt das Assoziativgesetz: $a(bc) = (ab)c$

• Matrizen: Allgemeine n -dimensionale Matrix:

S.44ff

$$\mathbf{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & & & \\ \dots & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Produkt zweier Matrizen:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i}b_{i1} & \sum_i a_{1i}b_{i2} & \sum_i a_{1i}b_{i3} & \dots \\ \sum_i a_{2i}b_{i1} & \sum_i a_{2i}b_{i2} & \sum_i a_{2i}b_{i3} & \dots \\ \sum_i a_{3i}b_{i1} & \sum_i a_{3i}b_{i2} & \sum_i a_{3i}b_{i3} & \dots \\ \vdots & & & \\ \dots & & & \sum_i a_{ni}b_{in} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Die Summe \sum_i über i geht von 1 bis n .

Die Anwendung einer n -dimensionalen Matrix \mathbf{A} auf einen n -dimensionalen Vektor v ergibt wieder einen Vektor:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}v = \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i}v_i \\ \sum_i a_{2i}v_i \\ \sum_i a_{3i}v_i \\ \vdots \\ \sum_i a_{ni}v_i \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Man definiert die adjungierte Matrix als das komplex Konjugierte und Transponierte:

$$\mathbf{A}^* = (a_{ki}^*) = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* & \dots \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* & \dots \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* & \dots \\ \vdots & & & \\ \dots & & & a_{nn}^* \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Die Einheitsmatrix ist

$$1 = (\delta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \\ \dots & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Sind die Komponenten der Matrix reell, wird nur transponiert, da für eine reelle Zahl gilt $a^* = a$.

Eine Matrix mit reellen oder komplexen Argumenten \mathbf{U} heisst unitär, wenn

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^* \quad (1.33)$$

(verallgemeinerte Drehung).

Beispiel: Drehung in einer Ebene um den Winkel θ .

Drehmatrix:

$$\mathbf{D}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Gedrehter Vektor von $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$:

$$v' = \begin{pmatrix} \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2 \\ -\sin \theta v_1 + \cos \theta v_2 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Zwei Drehungen um die Winkel θ und ϕ hintereinander durchgeführt ergeben

$$\begin{aligned} D_\phi D_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & \sin(\theta + \phi) \\ -\sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Das Produkt ist also eine Drehmatrix um den Winkel $\theta + \phi$.

Für die Drehmatrizen gilt:

$$\mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{-\theta} = \mathbf{D}^{-1} \quad (1.37)$$

Dies ist charakteristisch für die Drehung, da diese Eigenschaft garantiert, dass Längen von und Winkel zwischen Vektoren sich nicht ändern.

1.5.2 Das Wunder des Spins

- Genau genommen sind die Drehimpulsoperatoren die Erzeugenden der Drehungen multipliziert mit \hbar . S.46f

Eine Drehung um die z -Achse mit dem Winkel ϕ lässt sich mit Hilfe der erzeugenden \mathbf{L}_z darstellen als:

$$e^{i\phi\mathbf{L}_z} \quad (1.38)$$

Die Exponentialfunktion von einem Operator lässt sich z.B. über die Potenzreihe definieren:

$$e^{i\mathbf{L}_z\phi} = 1 + i\phi\mathbf{L}_z + (i\phi\mathbf{L}_z)^2/2 + (i\phi\mathbf{L}_z)^3/6 + \dots \quad (1.39)$$

Die Erzeugenden der $SU(2)$, \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 , \mathbf{s}_3 sind gegeben durch die Pauli-Matrizen: S.47

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

nämlich: $\mathbf{s}_k = \frac{1}{2}\sigma_k$, $k = 1 \dots 3$.

Man kann direkt die Vertauschungsrelationen nachrechnen:

$$\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_1 = i\mathbf{s}_3 \quad (1.41)$$

Die Drehung eines Spinors um die z -Achse ist gegeben durch (Potenzreihenentwicklung):

$$e^{i\mathbf{s}_3\phi} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Für $\phi = 360^\circ$ ist $\cos(\phi/2) = -1$ und $\sin(\phi/2) = 0$, bei einer Drehung um $\phi = 360^\circ$ ist also $e^{i\mathfrak{s}_3\phi}$ das Negative der Einheitsmatrix! Das heisst, dass bei einer vollen Drehung um 360° ein Spinor sein Vorzeichen ändert. Dies hat experimentell bestätigte Konsequenzen.

1.6 Die Entdeckung des Positrons und des „Mesotrons“

Ein geladenes Teilchen der Masse m und Ladung e bewege sich mit dem Impuls \vec{p} einem homogenen Magnetfeld. Es gilt die Bewegungsgleichung: S.55

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{B}], \quad |\vec{p}| = \text{konstant} \quad (1.43)$$

Für Geschwindigkeiten senkrecht zum Magnetfeld ergibt sich als Lösung eine Kreisbahn mit Radius

$$R = c|\vec{p}|/(eB) \quad (1.44)$$

Aus dem Krümmungsradius R lässt sich also der Impuls bestimmen.

1.7 Frühe Beschleuniger

Für v klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit folgt aus 1.44 S.61

$$R = \frac{mvc}{eB}, \quad (1.45)$$

und für die Umlauffrequenz $f = v/(2\pi R)$

$$f = \frac{eB}{2\pi mc}, \quad (1.46)$$

d.h. die Umlauffrequenz ist in nichtrelativistischer Näherung unabhängig von der Geschwindigkeit und damit der Energie.

Für alle Geschwindigkeiten, auch v nahe bei c , gilt die Beziehung:

$$v = pc^2/E \quad (1.47)$$

wobei E die Gesamtenergie des Teilchens ist. Damit wird die Umlauffrequenz:

$$f = \frac{ecB}{2\pi E}, \quad (1.48)$$

sie fällt also mit zunehmender Gesamtenergie ab. In nichtrelativistischer Näherung ist die Gesamtenergie gleich der Ruhenergie.

Kapitel 2

Der grosse Schritt vorwärts

2.4 Erfolge und Misserfolge der Quantenfeldtheorie

Der Wechselwirkungsterm eines Nukleons mit einem π -Meson ist:

S.79

$$L_{\text{Wechselwirkung}} = g_{\pi N} \psi^*(\vec{x}, t) \gamma_0 \gamma^5 \psi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

wobei $g_{\pi N}$ die π -Meson-Nukleon Kopplung ist und ϕ das Quantenfeld des π -Mesons, für die Matrix γ^5 s. (2.2). Für die Kopplung gilt $g_{\pi N}^2/(4\pi) \approx 14$, verglichen mit $e^2/(4\pi) \approx 1/137$ in der QED. Die sogenannte γ^5 Matrix ist gegeben als Produkt der in (1.13) eingeführten gamma-Matrizen:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (2.2)$$

2.7 Immer mehr neue Teilchen

In Abb. 2.12 ist auf der x -Achse die „invariante Masse“ $m_{\pi^+\pi^-}$ der beiden erzeugten π -Mesonen aufgetragen.

S. 90f

$$m_{\pi^+\pi^-}^2 c^2 = (p'_{\pi^+} + p'_{\pi^-})^2 \quad (2.3)$$

s. (1.10)

2.8 Die Überraschungen der schwachen Wechselwirkung

2.8.1 Einschub: Rechts- und Linkshändige Teilchen

Der Zusammenhang zwischen Weyl- und Dirac-Spinoren ist gegeben durch die γ_5 -Matrix (2.2): S. 97f

$$\chi_{\text{rechts}} = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi_{\text{Dirac}}, \quad \chi_{\text{links}} = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_{\text{Dirac}} \quad (2.4)$$

wobei χ rechts bzw. linkshändige Weyl-Spinoren und ψ ein Dirac-Spinor ist.

2.8.2 Zurück zur schwachen Wechselwirkung

An der schwachen Wechselwirkung nehmen nur die linkshändigen Teilchen teil, also $(1 - \gamma^5)\psi$. Konkret heisst dies für den Wechselwirkungsterm beim *mü*-Zerfall ($\mu \rightarrow e + \nu_e + \nu_\mu$): S. 99f

$$\mathcal{L}_{\text{Wechselwirkung}} = G_F \sum_{\rho=0}^3 \left(\psi_e^* \gamma^0 (1 - \gamma^5) \gamma^\rho \psi_{\nu_e} \right) \left(\psi_{\nu_\mu} \gamma^0 (1 - \gamma^5) \gamma_\rho \psi_\mu \right) \quad (2.5)$$

wobei die Indizes an den Feldern ψ angeben, um welche Teilchenfelder es sich handelt; G_F ist die schwache Fermi-Kopplungskonstante.

Der Ausdruck $\psi_e^* \gamma^0 (1 - \gamma^5) \gamma^\rho \psi_{\nu_e}$ ist ein „geladener schwacher $V - A$ Strom“.

Geladen, weil er die Ladung ändert (vom Neutrino zum Elektron), schwach weil er in der schwachen Wechselwirkung auftritt und $V - A$ weil sich der Teil $\psi_e^* \gamma^0 \gamma^\rho \psi_{\nu_e}$ wie ein normaler Vektor und der Teil $\psi_e^* \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\rho \psi_{\nu_e}$ wie ein axialer Vektor verhält.

2.8.2 Zurück zur schwachen Wechselwirkung

Bei CP -Verletzung setzen wir an: S. 101

$$K_S = pK^0 + q\bar{K}^0, \quad K_L = pK^0 - q\bar{K}^0 \quad (2.6)$$

wobei $\frac{p}{q} - 1$ ein Mass für die CP -Verletzung ist. Der experimentelle Wert dafür ist sehr klein, etwa 0.001. CP ist also nur sehr schwach verletzt.

Kapitel 3

Der Versuch, sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen

3.2 Streuamplituden

Der Wirkungsquerschnitt berechnet sich aus der Streuamplitude T als

S. 106

$$\sigma = \frac{1}{F} |T|^2 d\Gamma \quad (3.1)$$

wobei F der Teilchenfluss ist und $d\Gamma$ der „Phasenraumfaktor“.

Im System, in dem das Targetteilchen ruht gilt: $F = m_t(E_s - m_s)$, wobei E_s und m_s Energie und Masse des gestreuten Teilchens sind, m_t ist die Masse des Targetteilchens.

Der Phasenraumfaktor $d\Gamma$ ist das Mass aller Komponenten der 4-Impulse, mit der Einschränkung, dass das Quadrat des Impulses gleich der Masse des Teilchens ist und dass der Gesamtimpuls p_{tot} beim Streuprozess erhalten ist; für N Teilchen gilt also:

$$d\Gamma^N = \delta^4 \left(\sum_{i=1}^N p_{(i)} - p_{\text{tot}} \right) \prod_{i=1}^N d^4 p_{(i)} \delta(p_{(i)}^2 - m^2) \quad (3.2)$$

• **Sehr schematisch** können wir uns die Konsequenzen der Unitarität so klarmachen:

S. 107

Die Unitarität der S-Matrix besagt, dass das Produkt der S-Matrix mit ihrem hermitisch Adjungierten gleich der Einheitsmatrix ist:

$$S^\dagger S = 1 \quad (3.3)$$

Wenn die Streumatrix gleich der Einheitsmatrix ist, $S = 1$, so bedeutet dies, dass der Zustand nach der Streuung der gleiche ist wie vor der Streuung, d.h. es ist überhaupt nichts passiert. Ziehen wir die Eins von der S-Matrix ab, dann kommen wir zum interessanten Teil, der Streuamplitude, meist T-Matrix genannt:

$$T = (S - 1)/i$$

(die Division durch die imaginäre Einheit i ist Konvention). Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zu $|T|^2$, denn nur wenn $T \neq 0$, dann ist bei der Streuung etwas passiert.

Aus der Unitarität (3.3) folgt:

$$1 = S^\dagger S = (1 + iT)(1 - iT^\dagger) = 1 + i(T - T^\dagger) + TT^\dagger \quad (3.4)$$

oder

$$TT^\dagger = \frac{1}{i}(T - T^\dagger) \quad (3.5)$$

Aus letzter Gleichung folgt das *optische Theorem*, dass nämlich der totale Wirkungsquerschnitt gleich dem Imaginärteil der Streuamplitude in Vorwärtsrichtung ist.

Bei aktuellen Rechnungen spielt die Phasenraumdichte der streuenden Teilchen natürlich noch eine wichtige Rolle.

- Sei W stets die Gesamtenergie und θ der Streuwinkel im Schwerpunktsystem des Prozesses, d.h. in dem System, in dem beide zusammenstossende Teilchen gleichgrossen aber entgegengesetzt gerichteten Impuls haben.

S. 108

Dann gilt für den Fall der pi -Meson-Nukleon-Streuung für den Impuls und die Energie der einzelnen Teilchen im $\pi^- - p$ Schwerpunktsystem (Abb. 3.2.a):

$$|\vec{p}_\pi|^2 = |\vec{p}_p|^2 = \frac{1}{4W^2} \sqrt{[(W^2 - (m_p + m_\pi)^2)][W^2 - (m_p - m_\pi)^2]} \quad (3.6)$$

$$E_p = \frac{1}{2W} \sqrt{W^2 + m_p^2 - m_\pi^2}, \quad E_\pi = \frac{1}{2W} \sqrt{W^2 + m_\pi^2 - m_p^2} \quad (3.7)$$

und es gilt für die Mandelstam-Variablen:

$$s = (p_{\pi^-} + p_p)^2 = (p_{\pi^-'} + p_p')^2 = W^2, \quad (3.8)$$

$$t = (p_{\pi^-} - p_{\pi^-'})^2 = (p_p - p_p')^2 = -2\vec{p}_\pi^2(1 - \cos \theta) \quad (3.9)$$

Für den Fall der Proton-Antiproton-Vernichtung in 2 π -Mesonen, Abb. 3.2 b gilt :

$$|\vec{p}_\pi| = \frac{1}{2W} \sqrt{W^2 - 4m_\pi^2}, \quad |\vec{p}_p| = \frac{1}{2W} \sqrt{W^2 - 4m_p^2} \quad (3.10)$$

$$E_p = E_\pi = \frac{W}{2} \quad (3.11)$$

Die Mandelstam Variablen für diesen Vernichtungsprozess sind:

$$t = (p_p + p_{\bar{p}})^2 = (p_{\pi^-} - p_{\pi^+})^2 = W^2 \quad (3.12)$$

$$s = (p_p - p_{\pi^+})^2 = (p_{\bar{p}} - p_{\pi^-})^2 \quad (3.13)$$

$$= m_p^2 + m_{\pi^+}^2 - \frac{1}{2} \left(W^2 - \sqrt{[W^2 - 4m_p^2][W^2 - 4m_\pi^2]} \cos \theta \right)$$

(W und θ beziehen sich auf das Schwerpunktsystem des Protons und Antiprotons)

Der Graph von Abb. 3.2.c hat für die π -Meson-Nukleon-Streuung den Polterm, vg. (3.8):

$$\frac{1}{s - m_n^2} = \frac{1}{(p_\pi + p_p)^2 - m_n^2} = \frac{1}{W^2 - m_n^2}. \quad (3.14)$$

Für die Vernichtung von Proton und Antiproton lautet der Polterm, vgl. (3.12):

$$\frac{1}{(p_p - p_{\pi^+})^2 - m_n^2} = \frac{1}{m_p^2 + m_\pi^2 - \frac{1}{2} \left(W^2 - \sqrt{[W^2 - 4m_p^2][W^2 - 4m_\pi^2]} \cos \theta \right) - m_n^2} \quad (3.15)$$

wobei sich nun W und θ auf das Schwerpunktsystem des Protons und Antiprotons beziehen.

3.4 Strenge Theoreme und komplexe Drehimpulse

Aus der axiomatischen Feldtheorie folgt für den totalen Wirkungsquerschnitt zweier Hadronen die Froissart-Martin Schranke: S. 114

$$\sigma \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \left(\log(W^2/W_0^2) \right)^2 \quad (3.16)$$

wobei W_0 allerdings unbestimmt ist.

- Bei der Fortsetzung der Drehimpulse ins Komplexe ist der entscheidende Punkt, dass man die Summe über alle Partialwellen mit Hilfe des Residuensatzes in ein Integral verwandelt und dann nach Deformation des Integrationsweges die unendliche Summe durch einige Polterme ausdrückt. S. 115

- Die Veneziano Amplitude für die elastische Streuung von 2 gleichen Teilchen der Masse m ist: S. 116

$$A(s, t) = B(-\alpha(s), -\alpha(t)) + B(-\alpha(s), -\alpha(u))B(-\alpha(t), -\alpha(u)) \quad (3.17)$$

wobei die Eulersche Beta-Funktion $B(x, y)$ gegeben ist durch die Gamma-Funktionen:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (3.18)$$

und $u = 4m^2 - s - t$, und $\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s$ ist die Regge-Trajektorie.

Diese Amplitude hat Pole wenn die Trajektorien ganzzahlige Werte annehmen und auch das richtige asymptotische Verhalten, wie man nach der Stirling-Formel ausrechnen kann.

Kapitel 5

Auf dem Weg zum Standardmodell

5.1 Der Eichmeister

Wenn eine Wellenfunktion mit einem Phasenfaktor, d.h. einer konstanten komplexen Zahl vom Betrag 1, multipliziert wird, so beschreibt sie immer noch den gleichen physikalischen Zustand. Die Phasenfaktoren, $e^{i\lambda}$, λ reell, sind Elemente der $U(1)$, d.h. wir können das so ausdrücken: *die Quantenmechanik ist invariant unter $U(1)$ -Transformationen*. Weyl fand es nun unplausibel, dass λ tatsächlich eine Konstante sein muss, selbst wenn die Wellenfunktion sich über noch so grosse Gebiete erstreckt. Er nannte dies einen Fernparallelismus, der zu verwerfen sei. Er forderte daher, dass aus der Wellenfunktion auch noch die gleiche Physik folge, wenn der Phasenfaktor von Raum und Zeit abhängt, also die Wellenfunktion mit $e^{ie\lambda(\vec{x},t)}$ multipliziert wird. Die Verwerfung des Fernparallelismus bedeutet: Die Wellenfunktion $u(\vec{x}, t)$ und die „umgekehrte“ Wellenfunktion $e^{i\lambda(\vec{x},t)}u(\vec{x}, t)$ beschreiben die gleiche physikalische Situation. Dies scheint unmöglich, denn die Wellenfunktion eines freien Fermions $u(\vec{x}, t)$ genügt einer linearen Differentialgleichung, der Dirac-Gleichung (1.12):

S. 145

$$\left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - mc^2 \right) u(\vec{x}, t) = 0 \quad (5.1)$$

($x_0 = ct$)

Dass die γ^ρ 4×4 -Matrizen sind, spielt hier keine Rolle. Wenn Ihnen Matrizen unsympathisch

(weil nicht vertraut) sind, können sie für diese Überlegung auch annehmen, die γ -Matrizen seien einfache Zahlen.

Wenn die Umzeichnung:

$$u(\vec{x}, t) \rightarrow u'(\vec{x}, t) = e^{ie\lambda(\vec{x}, t)} u(\vec{x}, t) \quad (5.2)$$

vorgenommen wird, so genügt $u'(\vec{x}, t)$ nicht mehr der Dirac-Gleichung (5.1), denn nach der Produktregel gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - m \right) u'(\vec{x}, t) \quad (5.3) \\ &= \left(\gamma_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_0} u(\vec{x}, t) + i e u(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_0} \lambda(\vec{x}, t) \right] \right. \\ &+ \gamma_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} u(\vec{x}, t) + i e u(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda(\vec{x}, t) \right] \\ &+ \gamma_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_2} u(\vec{x}, t) + i e u(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda(\vec{x}, t) \right] \\ &+ \left. \gamma_3 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} u(\vec{x}, t) + i e u(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda(\vec{x}, t) \right] - m u(\vec{x}, t) \right) e^{i\lambda(\vec{x}, t)} \\ &= \left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \lambda(\vec{x}, t) + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda(\vec{x}, t) + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda(\vec{x}, t) + \right. \\ &\quad \left. \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda(\vec{x}, t) \right) i e u(\vec{x}, t) \neq 0 \quad (5.4) \end{aligned}$$

Wir müssen also diesen Term los werden.

Dies geschieht, indem wir die Gleichung modifizieren, und zwar zu:

$$\begin{aligned} & \left(i\gamma_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_0} + ieA^0 \right] + \gamma_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + ieA^1 \right] + \gamma_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_2} + ieA^2 \right] \right. \\ & \quad \left. + \gamma_3 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} + ieA^3 \right] - m \right) u(\vec{x}, t) = 0 \quad (5.5) \end{aligned}$$

Wenn die Wellenfunktion gemäss 5.2 umgezeichnet wird und gleichzeitig noch das neu ein-

geführte 4-Vektor Feld (A^0, \vec{A}) auf folgende Weise umgeichtet wird:

$$A^\rho(\vec{x}, t) \rightarrow A'^\rho(\vec{x}, t) = A^\rho(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial x_\rho} \lambda(\vec{x}, t), \quad \rho = 0 \dots 3, \quad (5.6)$$

dann kann man leicht folgendes nachrechnen: Wenn $u(\vec{x}, t)$ und $A(\vec{x}, t)$ Lösungen von 5.5 sind, auch $u'(\vec{x}, t)$ und $A'(\vec{x}, t)$ Lösungen sind!

Nun ist aber 5.6 gerade die altbekannte Umeichung des 4-Potentials in der Elektrodynamik, bestehend aus dem elektrischen Potential A^0 und dem magnetischen Vektorpotential \vec{A} ; (5.5) ist die Dirac-Gleichung für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld. Dies ist die erfolgreiche Gleichung die auf Anhieb das Problem der Feinstruktur im H-Atom löst und das richtige gyromagnetische Verhältnis des Elektrons ergibt. Wir sehen also, wenn wir nur Invarianz unter der Umeichung (5.2) fordern, dann folgt die Existenz des elektromagnetischen Feldes und seine Wechselwirkung mit einem geladenen Teilchen, beschrieben durch Gleichung (5.5). Das elektrische und das magnetische Feld wird von der Umeichung der Potentiale (5.6) nicht beeinflusst. Ich gebe hier nur die 1-Komponente des elektrischen (\vec{E}) und magnetischen (\vec{B}) Feldes an:

$$E^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} A^0 - \frac{\partial}{\partial x_0} A^1, \quad B^1 = \frac{\partial}{\partial x_2} A^3 - \frac{\partial}{\partial x_3} A^2 \quad (5.7)$$

Fassen wir zusammen: Es gibt unbestritten in der Quantenmechanik eine Symmetrie: Multipliziert man die Wellenfunktionen mit einem Phasenfaktor, also einer komplexen Zahl vom Betrag 1, so ändert dies nichts an den Ergebnissen. Fordert man, dass die Symmetrie auch gilt, wenn der Phasenfaktor an jedem Punkt des Raum-Zeit-Kontinuums andere Werte annehmen kann, also eine beliebige Funktion von Raum und Zeit-Koordinaten ist, so sagt man heute allgemein, man habe diese Symmetrie geeicht. Die verschärfte Forderung nach Eichsymmetrie führt zu weitreichenden dynamischen Konsequenzen: Es muss ein neues Feld, hier neben dem Materiefeld für die geladenen Teilchen auch noch das elektromagnetische Feld eingeführt werden, und die Wechselwirkung des neuen Feldes mit den bisherigen ist auch schon festgelegt.

Die Wechselwirkung geladener Fermionen mit dem elektrischen Feld (1.18) folgt direkt aus (5.5).

5.2 Die Eichungen werden mehrdimensional

Die Transformationen der $SU(2)$ -Gruppe werden erzeugt durch die Pauli-Matrizen σ_k (1.40), d.h. ein Iso-Spinor χ geht über in S. 146

$$\chi \rightarrow \chi' = e^{ig \sum_k \lambda_k \sigma_k} \chi \quad (5.8)$$

wobei die Summe von 1 . . . 3 läuft, g ist die $SU(2)$ Eichkopplung. Die $SU(2)$ -wird geeicht, indem man die 3 reellen Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von Raum und Zeit abhängen lässt:

$$\chi \rightarrow \chi' = e^{i \sum_k \lambda_k(\vec{x}, t) \sigma_k} \chi \quad (5.9)$$

bei einer geeichten $SU(2)$ muss man wegen der 3 Erzeugenden auch 3 Eich-4-Potentiale: $A_{(i)}^0, A_{(i)}^1, A_{(i)}^2, A_{(i)}^3$, $i = 1, 2, 3$ einführen.

Die Analoga der elektrischen und magnetischen Felder sind bei einer solchen „nichtabelschen Eichtheorie“ komplizierter, etwa für die 1-Komponente des 1. (von 3) „elektrischen“ Feldern:

$$E_{(1)}^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} A_{(1)}^0 - \frac{\partial}{\partial x_0} A_{(1)}^1 + ig(A_{(2)}^1 A_{(3)}^0 - A_{(2)}^0 A_{(3)}^1) \quad (5.10)$$

Es ist der zusätzliche nichtlineare Term $ig(A_{(2)}^1 A_{(3)}^0 - A_{(2)}^0 A_{(3)}^1)$. der für die Kopplung der Eichbosonen aneinander (Fig. 5.3a und b) verantwortlich ist.

5.3 Spontane Symmetriebrechung

Wie im Haupttext erwähnt, fassen wir die beiden reellen Felder F_1 und F_2 zu einem komplexen Feld zusammen: S. 153

$$F(\vec{x}, t) = F_1(\vec{x}, t) + iF_2(\vec{x}, t).$$

Die statische Feldenergie schreibt sich dann einfach als:

$$V(F) = MF(\vec{x}, t)^* F(\vec{x}, t) + g \left(F(\vec{x}, t)^* F(\vec{x}, t) \right)^2$$

wobei der hochgestellte Stern * komplexe Konjugation bedeutet.

Das komplexe Feld F zerlegen wir in den Betrag $\eta(\vec{x}, t)$ und die Phase $\zeta(\vec{x}, t)$:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta(\vec{x}, t) + \sqrt{2} v) \exp \left[i \frac{\zeta(\vec{x}, t)}{\sqrt{2} v} \right] \quad (5.11)$$

wobei wir die Verschiebung $v = \sqrt{-M/(2g)}$ des Feldes so gewählt haben, dass das Minimum der statischen Energie bei $\eta = 0$ liegt. Aus 5.11 folgt

$$F(\vec{x}, t)^* F(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}(\eta(\vec{x}, t) + \sqrt{2} v)^2 \quad (5.12)$$

und wir erhalten nach leichter Rechnung:

$$V = -M\eta^2 + \eta^3 \sqrt{-Mg} + \frac{g}{4}\eta^4 - \frac{M^2}{2g} \quad (5.13)$$

In der statischen Feldenergie taucht das ζ -Feld nicht auf, insbesondere hat es also keinen Massenterm, das ζ -Feld ist das Feld des masselosen Goldstone-Bosons.

Es taucht nur noch im kinetischen Beitrag zur Feldenergie auf, und der liefert auch eine charakteristische Wechselwirkung des ζ -Feldes mit dem η -Feld. Das η Feld hat einen Masseterm $-M\eta^2$, der positiv ist, da M negativ ist.

Wenn wir nun Störungstheorie in den Feldern ζ und η treiben, finden wir den folgenden Teilcheninhalt:

Ein Goldstone-Boson mit Masse 0, das Feldquant des ζ -Feldes sowie ein „Higgs-Boson“ mit Masse $\sqrt{-M}$, das Feldquant des η -Feldes.

5.4 Das Festmahl von Higgs und Kibble

Wird an das skalare Feld F noch ein Eichfeld angekoppelt (z.B. ein elektromagnetisches), so gibt es als Beitrag zur statischen Feldenergie ausser den schon erwähnten Beiträgen noch den zusätzlichen Wechselwirkungsterm des Feldes F mit dem Eichpotential A_μ . Dieser Term ist :

$$e^2 \sum_{\mu=0}^3 A_\mu(\vec{x}, t) A^\mu(\vec{x}, t) F(\vec{x}, t)^* F(\vec{x}, t), \quad (5.14)$$

d.h. wir haben

$$V(F) = MF^*F + g(F^*F) + e^2 \sum_{\mu} A_\mu A^\mu F^*F \quad (5.15)$$

wobei wir kurz F für $F(\vec{x}, t)$ schreiben usw.

Ersetzen wir nun wieder nach (5.11) F durch η und ζ , so erhalten wir:

$$V = -M\eta^2 + \eta^3\sqrt{-Mg} + \frac{g}{4}\eta^4 - \frac{M^2}{2g} + e^2 \sum_{\mu} A_{\mu}A^{\mu} \left(\frac{1}{2}\eta^2 + \sqrt{\frac{-M}{g}}\eta + \frac{-M}{2g} \right) \quad (5.16)$$

Wir sehen, dass wir nun auch einen quadratischen Term im Eichpotential haben, nämlich $\frac{-M}{2g} e^2 \sum_{\mu} A_{\mu}A^{\mu}$. Die ist ein Massenterm, das Eichfeld hat also eine Masse

$$m_A = \frac{-M}{2g} e^2$$

bekommen.

Das Goldstone Boson mit seinem Feld ζ tritt zwar immer noch formal auf, aber wir können es in diesem Falle der spontanen Symmetriebrechung einer Eichsymmetrie wegeichen: Ersetzen wir nämlich (vgl. 5.2,5.6):

$$F \rightarrow e^{-i\zeta/\sqrt{2v}}F, \quad A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\zeta}{\sqrt{2ve}}, \quad (5.17)$$

so eliminiert diese Umeichung das ζ -Feld aus (5.11) vollständig, ändert aber nichts an der Physik, da es sich ja nur eine Umeichung handelt.

5.6 Bessere Zähler, bessere Beschleuniger und bessere Strahlen

Die Gesamtenergie W im Schwerpunktsystem ist gegeben durch $W^2 = s = (p_1 + p_2)^2$. Im Laborsystem (ruhendes target) ist $p_1 = (m_1, \vec{0})$ also S. 160

$$W = m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{m_1 E_2}. \quad (5.18)$$

Die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem steigt also nur mit der Wurzel der Gesamtenergie E_2 des beschleunigten Teilchens an.

Werden dagegen die beiden Teilchen mit gleichem, aber entgegengesetzt gerichteten Impuls beschleunigt, also $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, dann ist

$$W = E_1 + E_2, \quad (5.19)$$

die Gesamtenergie steigt also linear mit der Energie an.

5.7 Die Elektronenmikroskope der Elementarteilchenphysik Beim elastischen Zusammenstoß zweier Teilchen ist die maximale Impulsübertragung:

S. 166

$$|Q| \leq 2|\vec{p}^*| \quad (5.20)$$

wobei der Impuls im Schwerpunktsystem, \vec{p}^* gegeben ist durch, s. (3.6)

$$|\vec{p}^*| = \sqrt{\frac{(W^2 - (m_1 + m_2)^2)(W^2 - (m_1 - m_2)^2)}{4W^2}} \quad (5.21)$$

wobei W die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem ist. Für relativistische Teilchen können die Massen vernachlässigt werden und es gilt näherungsweise:

$$|Q| \leq W \quad (5.22)$$

Dies ist der Grund, warum man hohe Energien braucht, um kleine Strukturen aufzulösen.

5.8 Tief inelastische Streuung

Entscheidend für die Analyse der tiefinelastischen Streuung ist das optische Theorem: Der untere Teil des Graphen von Abb. 5.13 kann als die Streuung eines virtuellen Photons mit einem Proton betrachtet werden, der obere Teil ist aus der QED bekannt. Daher misst man sozusagen in der tief inelastischen Streuung den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines virtuellen Photons an einem Proton. Dieser totale Querschnitt ist wiederum proportional dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude, die man theoretisch analysiert.

S. 171

Im Detail ist die Behandlung der tiefinelastischen Streuung sehr kompliziert, da es aufgrund des Spins und der verschiedenen Ströme (schwacher und elektromagnetischer) insgesamt 3 Strukturfunktionen gibt. Um sie zu bestimmen braucht man sehr detaillierte Messungen mit Elektronen oder Positronen und Neutrinos.

Kapitel 6

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik

6.3 Schwache Ströme

Das Dublett der Quarks, das dem Dublett der Leptonen aus Abb. 6.2 entspricht ist also: S. 179f

$$\begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Dem Dublett des Müons und seines Neutrinos entspricht dann:

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ s \cos \theta_C - d \sin \theta_C \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Dabei steht u, d, s, c für up, down, seltsames und charm-Quark, θ_C ist der Cabbibo-Winkel.

6.5 Laufende Kopplung und asymptotische Freiheit

Das Laufen der Kopplung ist aus der Callan-Symanzik-Gleichung bestimmt zu: S. 192

$$\mu \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu} = 2\beta(\alpha_s) \quad (6.3)$$

wobei μ die Energieskala ist, also umgekehrt proportional der Abstandsskala. Ist $\beta(\alpha_s)$ negativ, so nimmt α_s mit wachsender Skala μ , also kleinerer werdendem Abstand, ab, die Theorie ist asymptotisch frei.

In der Störungstheorie ergibt sich $\beta(\alpha_s)$ zu:

$$2\beta(\alpha_s) = -\frac{\beta_0}{2\pi}\alpha_s^2 - \frac{\beta_1}{4\pi^2}\alpha_s^3 - \frac{\beta_2}{64\pi^3}\alpha_s^4 - \dots \quad (6.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 11 - \frac{2}{3}n_f \\ \beta_1 &= 51 - \frac{19}{3}n_f \\ \beta_2 &= 2587 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2 \end{aligned}$$

dabei ist n_f die Zahl der „aktiven Flavours“ (s. Tabelle)

| ungefährer Energiebereich μ (GeV) | Zahl der aktiven Quark Flavours n_f | $\Lambda^{(n_f)}$ (MeV) |
|---|---|----------------------------|
| > 200 | 6 | 88 ± 11 |
| 10 – 200 | 5 | 208 ± 25 |
| 3 – 10 | 4 | 288 ± 30 |
| < 3 | 3 | 326 ± 30 |

Tabelle 6.1: Zahlenwerte von Λ_{QCD} in Abhängigkeit von der Zahl der aktiven Flavours.

Nimmt man nur die niedrigste Näherung, β_0 , so erhält man leicht:

$$\frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} = \frac{\beta_0}{2\pi} \frac{d\mu}{\mu} \quad (6.5)$$

und damit

$$\alpha_s(\mu_1) = \frac{\alpha_s(\mu_2)}{1 + \frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_s(\mu_2) \log\left(\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right)} \quad (6.6)$$

bzw.

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \log\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right)} \quad (6.7)$$

wobei Λ_{QCD} eine für die QCD typische Grösse ist, s. Tabelle.

Die Verwendung der laufenden Kopplung bei der Skala μ_2 entspricht einer Aufsummation aller Potenzen von $\alpha(\mu_1) \log(\mu_2^2/\mu_1^2)$. Leider hängt diese „Renormierungsgruppenverbesserung“ in einigen Fällen auch von der Wahl des gewählten Renormierungsschemas ab. Das für viele Fälle bequemste Schema ist das sogenannte \overline{MS} (sprich MS-bar) Schema. MS steht für *Minimal Subtraction*.

• Für die QED gilt in niedrigster nichtverschwindender Näherung: $\beta_{\text{QED}} = -\frac{4}{3}$, also ist $\beta(\alpha) > 0$ und die QED Kopplung wächst mit wachsender Energie-Skala (abnehmenden Abstand); sie ist also nicht asymptotisch frei. Die natürliche untere Schranke für die Skala ist hier die Elektronenmasse m_e . Bei Beschränkung auf β_0 erhalten wir: S. 194

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(m_e)}{1 - \frac{\beta_{\text{QED}}}{4\pi} \alpha(m_e) \log\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right)} \quad (6.8)$$

mit $\alpha(m_e) = \alpha = \frac{1}{137}$.

Der Ausdruck (6.8) hat eine Singularität bei $1 = \frac{\alpha(m_e)}{3\pi} \log\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right)$. Dies ist der sogenannte Landau-Pol bei einer Energie von 10^{277} GeV !!, dagegen ist die Planck-Masse winzig.

Die Strahlungskorrekturen der QED allein erhöhen die laufende elektromagnetische Kopplung α bei der Skala der Z^0 -Masse um etwa 2%.

6.7 Quantenchromodynamik auf dem Gitter

Sei P ein Gitterpunkt und $P+\mu$ ein benachbarter Punkt in μ -Richtung; a ist der Abstand zwischen den Gitterpunkten. Hat also etwa P die Koordinaten $(0,0,0,0)$ und ist $\mu = 3$, dann hat $P+\mu$ die Koordinaten $(0,0,a,0)$. $\psi(P)$ ist ein Fermionfeld an einem Gitterpunkt P und $U(P,\mu)$ bezeichne ein *link* von P nach $P+\mu$. U ist ein Element der Eichgruppe, für die Elektrodynamik, $U(1)$, gilt S. 199

$$U(P,\mu) = \exp[iaA_\mu(P)]. \quad (6.9)$$

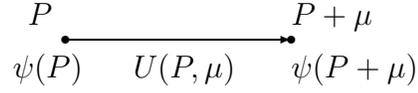


Abbildung 6.1: Die Felder auf dem Gitter. Den Punkten sind die Fermionfelder, den Verbindungen zwischen den Punkten (*links*) die Eichfelder (6.9) zugeordnet

Der wesentlichen Anteile der Wechselwirkung auf dem Gitter ist gegeben einmal durch den reinen Eichfeldanteil

$$\sum_{\mu, \nu=1}^4 U(P, \mu)U(P + \mu, \nu)U(P + \mu + \nu, -\nu)U(P + \mu, -\mu), \quad (6.10)$$

sowie den Fermionischen Anteil

$$\sum_{\mu=1}^4 \psi^*(P + \mu)\gamma_{\mu}U(P, \mu)\psi(P). \quad (6.11)$$

Die Gitter-QCD wird auf einer Euklidischen Raum-Zeit definiert, diese erhält man aus der Minkowskischen durch die Ersetzung der Zeit durch eine imaginäre Grösse (ja, die gute alte *ict*-Metrik):

$$ct = x_0 \rightarrow -ix_4, \quad x_4 \text{ reell} \quad (6.12)$$

Der Minkowskische metrische Tensor (1.7) wird durch den Euklidischen ersetzt, d.h. Kronecker-Deltas:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow -\delta_{\mu\nu}$$

Kapitel 7

Dunkle Wolken oder Morgenröte einer neuen Physik?

7.3 Die grosse Einheit

Eine Familie hat 15 Fermionen: 12 Quarks (2 Quarks und 2 Antiquarks in jeweils 3 Farben), Lepton, Antilepton und Neutrino. Um definiert zu sein, betrachten wir die Familie von u , d -Quarks, e und ν_e . S. 233

Im Modell von Georgi und Glashow ($SU(5)$) bilden die 3 u und 3 d -Quarks, die 3 u -Antiquarks und das Positron die Basis einer 10-dimensionalen Darstellung. Die d -Antiquarks, Elektron und das Neutrino die Basis einer 5-dimensionalen Darstellung.

$$\begin{aligned}(\mathbf{10}) &= \{u_R, u_B, u_w, d_R, d_B, d_W, \bar{u}_R, \bar{u}_B, \bar{u}_W, \bar{e}\} \\(\mathbf{5}) &= \{\bar{d}_R, \bar{d}_B, \bar{d}_W, e, \nu\}\end{aligned}$$

wobei die Indices $R B W$ für die 3 Farben der Colour- $SU(3)$ stehen und der Querstrich $\bar{\quad}$ das Antiteilchen bezeichnet.

In einer $SU(5)$ sind diese mit einem Antineutrino zu einer 16-dimensionalen Basis zusammengefasst.

Die Supersymmetrie Die einfachste Supersymmetrische Algebra ist gegeben durch S. 235
die 4 Erzeugenden der Translationen in Raum und Zeit, d.i. der Energieoperator \mathbf{P}_0

und die Impulsoperatoren $\vec{\mathbf{P}}$ sowie einen Fermionischen Operator Q_α mit den (Anti)-Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned}
[Q_\alpha, \bar{Q}_\beta]_+ &= 2\mathbf{P}_0 - 2\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\vec{\mathbf{P}} & (7.1) \\
[Q_\alpha, Q_\beta]_+ &= [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}]_+ = 0 \\
[P_m, Q_\alpha]_- &= [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}]_- = 0 \\
[P_m, P_n]_- &= 0
\end{aligned}$$

mit $m, n = 0 \dots 3$, $\alpha, \dot{\alpha} \dots = 1, 2$.

7.7 Ruhige Saiten

Die Gleichung für die Auslenkung η einer schwingenden Saite lautet:

S. 246

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2}{dt^2} \right) \eta(x, t) = 0 \quad (7.2)$$

wobei v bestimmt ist durch die lineare Massendichte μ und die Spannung T der Saite:
 $v = \sqrt{T/\mu}$.

Die Wellengleichung 7.2 hat die allgemeine Lösung (d'Alembert):

$$\eta(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (7.3)$$

wobei f und g beliebige Funktionen einer Variablen sind.