

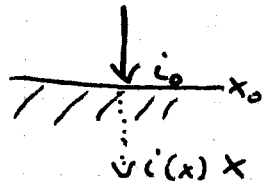
3.3. Generation, Recombination + Basic Equations

In ~~the~~ diesem Abschnitt werden wir die dominierenden Prozesse zur Absorption von Licht und Rekombination der erzeugten e^- -Loch-Paare kennenlernen.

3.3.1 Absorption von Licht

Da die Abschwächung eines Lichtstrahls durch Materie proportional zur jeweiligen Intensität ist: $\frac{di}{i} = -\alpha dx$ folgt der bekannte exponentielle Abfall mit der Eindringtiefe $(x-x_0)$ und dem Absorptionskoeffizienten $\alpha(\omega)$, der eine Funktion der Wellenlänge des Lichts ist:

$$i(x) = i(x_0) e^{-\alpha(\omega)[x-x_0]}$$



Die Möglichkeiten zur Absorption unterscheiden sich nun stark zwischen direktem und indirektem Bandlücken Halbleiter:

Direct-Band-Gap:

Photonen besitzen recht große Energien (E_ω) im Vergleich zu deren Impulsen. Wir sehen dies nämlich von der Ruhe Masse der gewöhnlichen Materie ab. Am Ende vom Tag liegen reelle Teilchen schließlich auf der Massenschale $k^2 = k_0^2 - k^2 = m^2$. Absorbiert zu Photovoltaik?

Impuls: $\frac{h}{\lambda}$

Da die Protonen im Vergleich zum Gitterimpuls kaum Impuls mitbringen bleibt bei der Absorption des Gitterimpuls erhalten. Wir wissen aus dem Kapitel 3.2, daß nahe der Bandgrenze die Beziehungen

$$E - E_c = \frac{p^2}{2m_e^*} \quad ; \quad E_v - E = \frac{p^2}{2m_h^*} \quad \text{gilt.}$$

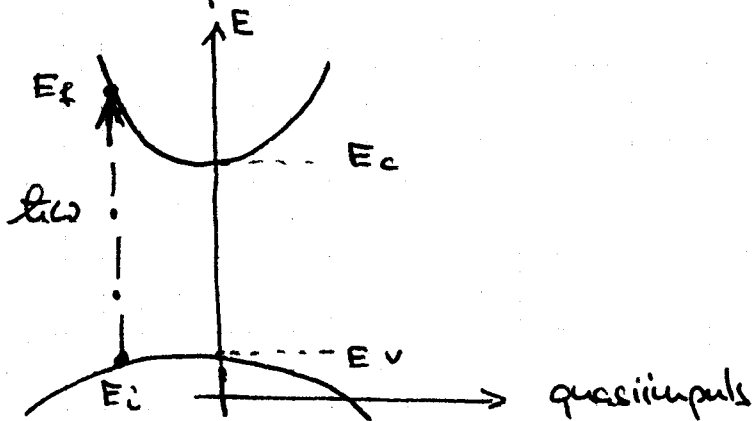
Das e^- welches ein γ absorbiert ist zunächst im Valenzband: ($E_{\text{init}} = p$) und gelangt ins Leitungsband ($E_{\text{final}} = p$) wobei $p_{\text{final}} = p_{\text{initial}} = p$ durch Impulserhaltung ($R_g \approx 0$):

$$\Rightarrow E_f - E_i = \hbar\omega \quad ; \quad E_f - E_c = \frac{p^2}{2m_e^*} \quad ; \quad E_v - E_i = \frac{p^2}{2m_h^*}$$

$$\Rightarrow E_f - E_c + E_v - E_i = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right)$$

$$\Rightarrow \hbar\omega - E_g = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right)$$

D.h. mit steigender Energie des $e^- \gamma$'s steigt der Quasiimpuls an:



Die Wahrscheinlichkeit der Absorption hängt nun von der Zustandsdichte im Anfangs und Endzustand ab.

Für gewöhnlich steigt die Zustandsdichte mit der Energie an. Wir wissen, daß nahe der Leitungsbandkante gilt

$$N(E) \propto \sqrt{E - E_c}$$

Die meisten Zustände der e^- ~~unterhalb~~, welche sich noch im Valenzband befinden liegen wiederum nahe der Valenzbandkante (sie ist schließlich die höchste Energie im Valenzband). Daher erwarten wir ein Verhalten gemäß

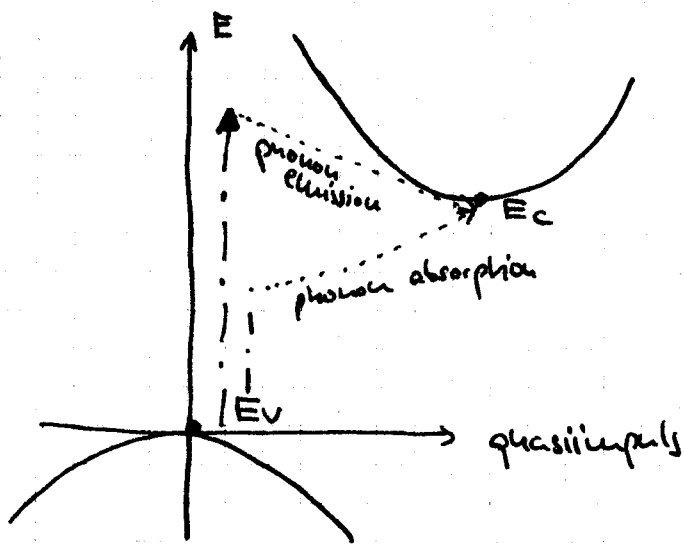
$$\begin{aligned} \alpha(\hbar\omega) &\propto N_{\text{Valenzband}}(E_v) \cdot N(E) \\ &= \text{const} \cdot \sqrt{E - E_c} \\ &= \text{const} \sqrt{E_v + \hbar\omega - E_c} \\ &\equiv A^* \sqrt{\hbar\omega - E_g} \end{aligned}$$

mit der Konstanten $A^* = 2 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{cm} \cdot \text{eV}}$

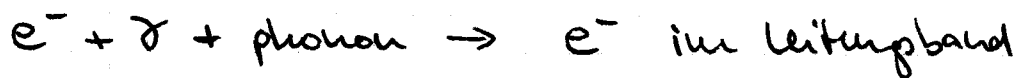
Sonnenlicht wird demnach Eindringtiefe im $[2 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}]^{-1}$ Bereich aufweisen, also $x \approx \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \text{ cm} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 \mu\text{m} = \frac{1}{2} \mu\text{m}$.

Indirect-Band-Gap

Wie wir aus Kapitel 3.2 wissen, liegt das Minimum des Leitungsbandes nicht direkt über dem Valenzband für indirect-band-gap Halbleiter wie Silizium:



Somit muß ein e^- welches ein γ absorbiert noch zusätzlich mit einer Gitteranregung, einem Phonon wechselwirken. Phononen sind Bosonen. Deswegen gibt es nicht also entweder eine Absorption oder Emission eines Phonons vor:



Die Wahrscheinlichkeit des Prozesses ist also proportional zu

$$N_e(E) \cdot N_{\text{phonon}}(E) \cdot f_{\text{phonon}} \text{ für die Absorption, d.h.}$$

da $f_{\text{phonon}} = \frac{1}{e^{E_p/KT} - 1}$ Bose-Einstein

ist, ergibt sich

absorption eines photon: $\alpha_a(\hbar\omega, E_p) = \frac{A[\hbar\omega - E_g + E_p]^2}{e^{E_p/KT} - 1}$

emission eines phonon: $\alpha_e(\hbar\omega, E_p) = \frac{A[\hbar\omega - E_g - E_p]^2}{1 - e^{-E_p/KT}}$

Da für $\hbar\omega > E_g + E_p$ sowohl Emission als auch Absorption möglich sind, ist in dem Fall die Gesamtabsorption

$$\alpha(\hbar\omega) = \alpha_e(\hbar\omega) + \alpha_a(\hbar\omega)$$

In der Literatur gibt es Formeln für $\alpha(\hbar\omega)$, die die gemessenen Kurven sehr gut beschreiben.

PPT

Bis zur Wellenlänge $> 0.4 \mu\text{m}$ sind indirekte Prozesse dominant, darüber, d.h. $\lambda < 0.4 \mu\text{m}$ gibt es einen starken Beitrag von direkten Übergängen.

3.3.2. Rekombination

Nachdem durch Photonen-Absorption e^- ins Leitungsband gehoben wurden, können sie natürlich wieder mit Löchern rekombinieren. Es gibt drei Hauptarten der Rekombination:

I. Radiative Rekombination

Ein e^- kann unter Aussendung eines γ 's in einen Valenzbandzustand zurückfallen. Dieser Prozess ist stark für direct-band-gap Halbleiter und schwächer für indirect-band-gap Halbleiter, da dann hierfür ein Phonon benötigt wird.

Die Gesamtrekombinationsrate für radiative Übergänge ist

$$R_R = B n p$$

Mit B als Materialkonstante,

Im Gleichgewicht ist $u \cdot p = u_i^2$ und damit die Nettorekombinationsrate:

$$u_R = B(u_p - u_i^2)$$

Gleich welcher Mechanismus, kann man die Ladungsträgerlebenszeit definieren:

$$\tau_e = \frac{\Delta n}{u}$$

$$\tau_h = \frac{\Delta p}{u}$$

u : Netto Rekombinationsrate

$\Delta p, \Delta n$: Störungen um die Gleichgewichtswerte p_0, n_0

oder aber, da Taylor sagt: $u = \underbrace{u(n_0^0, p_0^0)}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial n} \Delta n + \dots$

$$\left[\Rightarrow \frac{1}{\tau_e} = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_0 ; \frac{1}{\tau_h} = \left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_0 \right]$$

Für die Strahlungsübergänge dieses Abschnitt ergibt sich da $dp = dn$

$$u = 0 + \frac{\partial u}{\partial n} \Delta n + \frac{\partial u}{\partial p} \Delta p = \Delta n \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial p} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_0 = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_0 + \frac{\partial u}{\partial p} \Big|_0 = B(n_0 + p_0)$$

$$\text{und somit } \frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_h} = B(n_0 + p_0)$$

Für Silizium ist $B \approx 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$.

Die Strahlungsrekombination ist in direct-band-gap wesentlich stärker als in indirect band-gap.

II Auger Rekombination

Bei der Auger-Rekombination geht ein e^- vom Leitungsband in das Valenzband über und gibt die überschüssige Energie an ein e^- im Valenz- oder Leitungsband ab, welches dann Photonen aussendet. ~~Die Verteilung~~ Gleichungen gibt es den Effekt mit $1e^-$ und $2h$. Die Verteilungen sind demnach:

$$2e^-, 1h: U_{\text{Auger}} = B_n (n^2 p - n_0^2 p_0)$$

$$1e^-, 2h: U_{\text{Auger}} = B_p (n p^2 - n_0 p_0^2)$$

und somit die Lebensdauer mit $dn = dp$:

$$2e^-, 1h: \frac{1}{\tau} = B_n [2 n_0 p_0 + n_0^2]$$

$$1e^-, 2h: \frac{1}{\tau} = B_p [2 n_0 p_0 + p_0^2]$$

Wegen des jeweils zweiten Terms ist die Auger-Rekombination besonders effektiv in stark dotierten Halbleitern.

Für Silizium guter Qualität ist ab einer Dotation von 10^{17} cm^{-3} die Auger-Rekombination der dominante Effekt.

III Rekombination durch Fallen

Verunreinigungen und Störstellen führen zu zusätzlichen erlaubten Zuständen in der Bandlücke. Besonders gefährlich sind dabei Zustände nahe der Mitte der Bandlücke.

3.3.3. Grundlegende Gleichungen

Hier listen wir kurz die grundlegenden Gleichungen hier, mit der wir demnächst den n-p Übergang berechnen werden. Es sind dies

I. Poisson Gleichung

In 3-D: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ und für uns in 1-d:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

mit

$$\rho = q (p - n + N_D^+ - N_A^-)$$

Und wie wir aus Kapitel 3.2 wissen gilt in guter

Näherung $N_D^+ \approx N_D$; $N_A^- \approx N_A$

II. Stromdichte

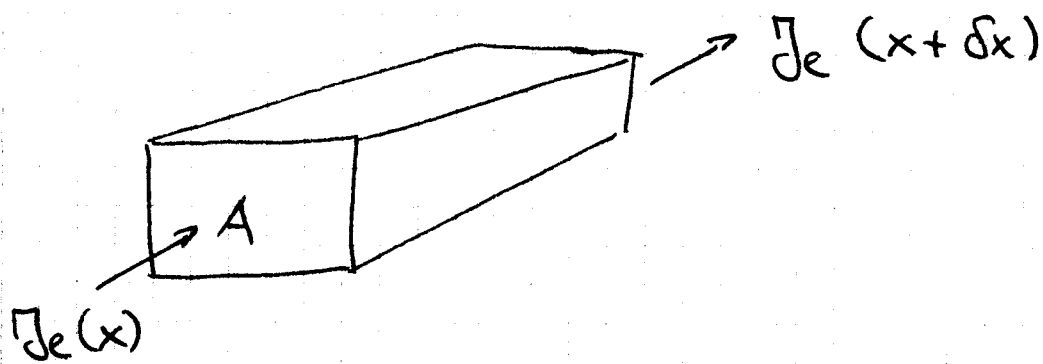
$$J_e = q n e \mu_s + q D_e \frac{dn}{dx} \quad ; \quad D_e = \frac{kT}{q} \mu_e$$

$$J_h = q p e \mu_p - q D_h \frac{dp}{dx} \quad ; \quad D_h = \frac{kT}{q} \mu_h$$

↑ ↑
Beweglichkeit Diffusionskoeffizient

III. Kontinuitätsgleichung

Der Strom von $n-e^\ominus$ und Löchern kann sich nur dann ändern, wenn es zu Netto-Erzeugung oder Rekombination kommt.



Rate des eintretenden - austretenden e^- im Leitungsband:

$$= \frac{A}{q} \{ -J_e(x) + J_e(x + \delta x) \} = \frac{A}{q} \frac{dJ_e}{dx} \delta x$$

das muß aber gleich sein zur Rate der Rekombination - Erzeugung:

$$= A \delta x \{ U - G \}$$

Wobei U die Nettorekombinations- und G die Nettoerzeugungsrate ist. G beinhaltet z.B. die Erzeugung von e^- im Leitungsband durch Lichteinfall.

Ist man im Gleichgewicht, muß gelten:

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_e}{dx} = U - G$$

Und für Löcher:

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_h}{dx} = -(U - G)$$

Womit wir (Martin Green folgend) die grundsätzlichen Gleichungen gefunden haben, die wir prinzipiell lösen müssen:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{q}{E} (p - u + u_D - u_A)$$

$$\mathcal{J}_e = q \mu_e u \zeta + q \mathcal{D}_e \frac{du}{dx}$$

$$\mathcal{J}_e = q \mu_e p \zeta - q \mathcal{D}_e \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{1}{q} \frac{d\mathcal{J}_e}{dx} = u - G \quad ; \quad \frac{1}{q} \frac{d\mathcal{J}_e}{dx} = -(u - G)$$

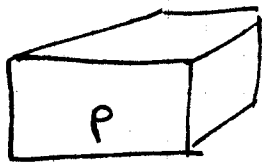
Dabei sind u und G Funktionen von u und p und im Zweifelsfall kompliziert, jedenfalls, wie wir für u gesehen haben auch mit u^2 etc, d.h. nicht-linearen Anteilen. Mit anderen Worten: Wir haben es mit einem System nicht-linearer, gekoppelter Differentialgleichungen zu tun. Entweder, man löst das nun numerisch, oder aber - weitans mehr erhellend - Näherungsweise.

3.4.: p-n Übergang Dioden

3.4.1 Elektrostatik des p-n Übergangs

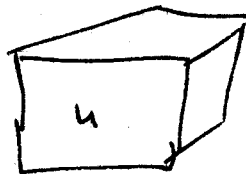
Bringt man ein Stück p und n Halbleiter zusammen, so diffundieren die e^- aus dem Leitungsband des n-Halbleiters in den p-Halbleiter (und die Löcher von p nach n). Schließlich baut sich ein E-Feld auf, das eine weiteren Diffusion entgegenwirkt.

Diesen Gleichgewichtszustand berechnen wir im Folgenden.



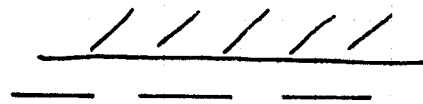
$$p = p_p^0 \approx N_A$$

$$n = n_p^0 = \frac{n_i^2}{N_A}$$



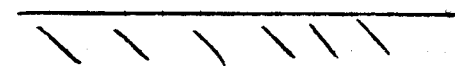
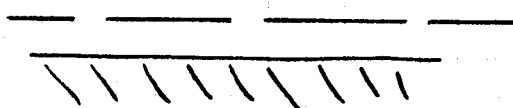
$$n = n_n^0 \approx N_D$$

$$p = \frac{n_i^2}{N_D} = p_n^0$$



E_F

E_{Fp}

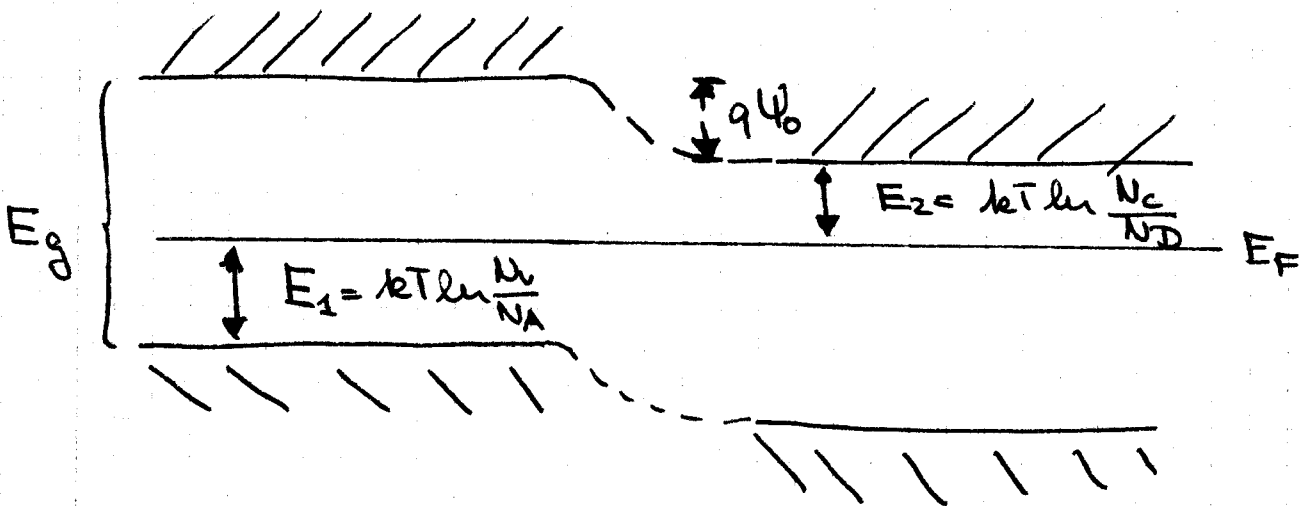
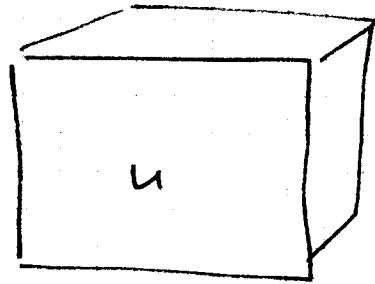
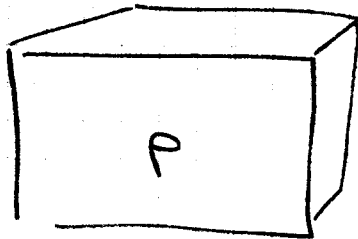


Im thermischen Gleichgewicht gibt es nur ein Fermi-Niveau. Weit weg vom Übergang erwartet man, dass die Verhältnisse sind, wie im ungestörten Zustand. Mit anderen Worten: Es muß eine Potentialänderung nahe des Übergangs geben.

Erinnern wir uns an unsere Ergebnisse aus 3.2, als wir die Lage des Fermi-niveaus in p + n Halbleitern berechnet haben:

$$n: E_F - E_c = kT \ln \frac{N_D}{N_c} \equiv E_2$$

$$p: E_v - E_F = kT \ln \frac{N_A}{N_v} \equiv E_1$$



Somit ist der Potentialsprung gleich

$$q\psi_0 = E_g - E_1 - E_2 = E_g - kT \ln \frac{N_c N_v}{N_A N_D}$$

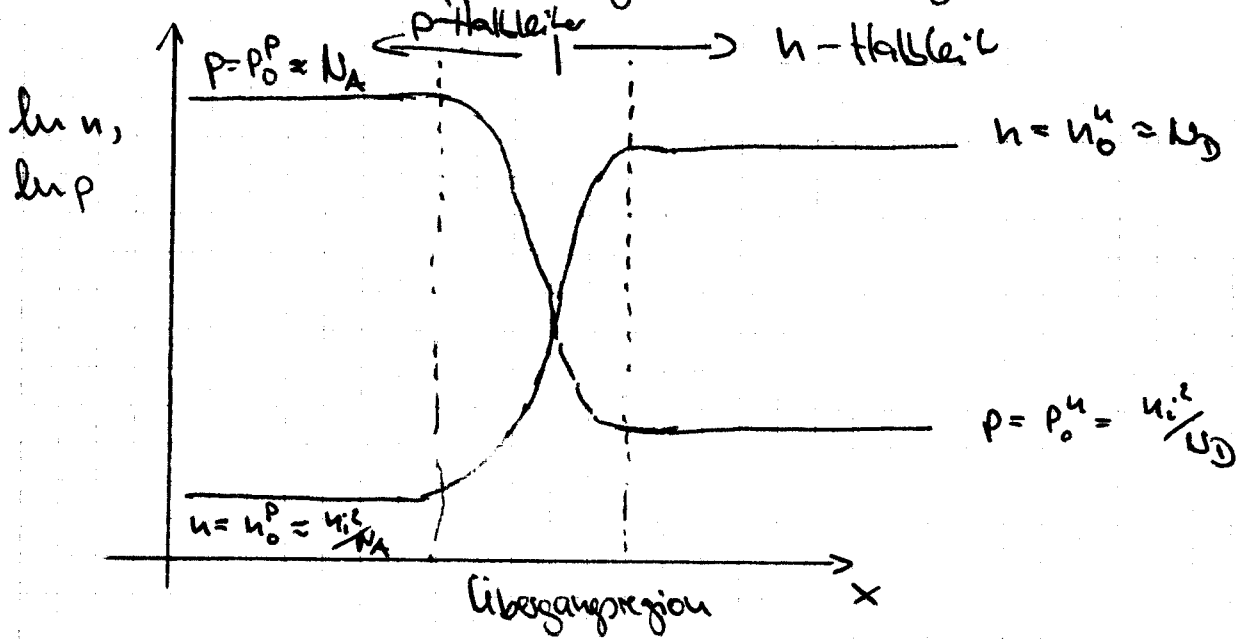
Weiters wissen wir aus 3.2, daß

$$n_i^2 = n_p = N_c N_v e^{-E_g/kT}$$

$$\Rightarrow \psi_0 = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}$$

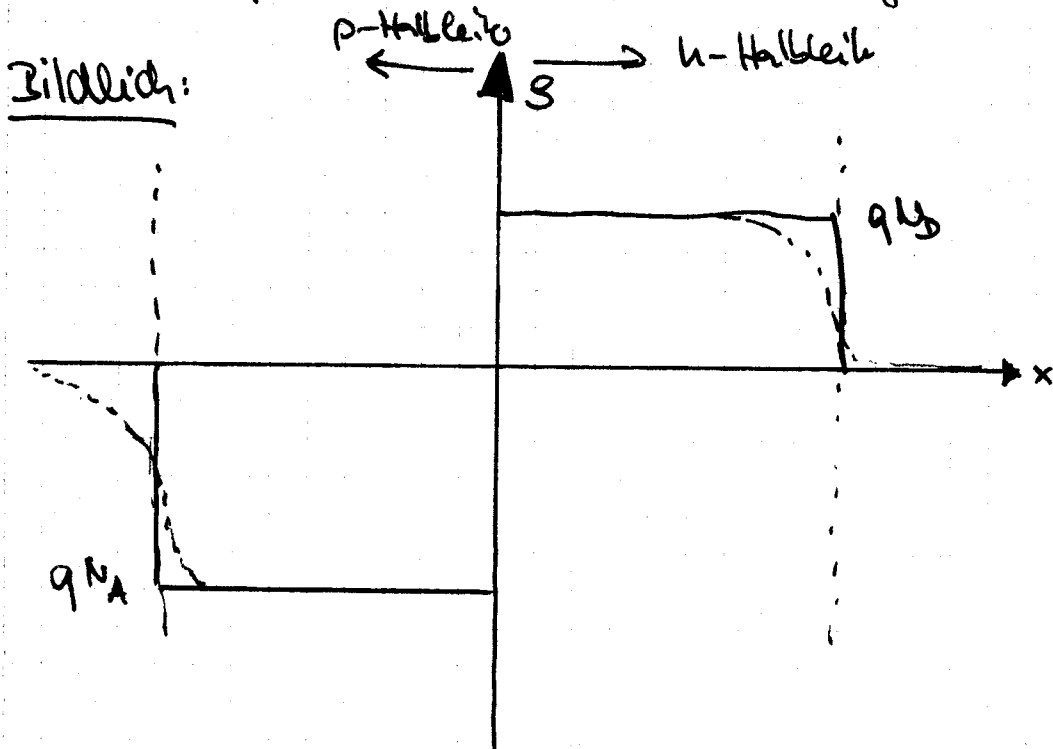
Da die Konzentrationen von n und p, wie wir in Kapitel 3.2 gesehen haben exponentiell von

$E_F - E_c$, bzw. $E_v - E_F$ abhängt, ist der Übergang recht deutlich. Doppelt logarithmisch dargestellt:



In der Übergangsregion ist somit:

- Auf der n-Halbleiter Seite: N_D ionisierte Donatoren, aber $n \ll N_D$ e^- im Leitungsband
- Auf der p-Halbleiter Seite: N_A ionisierte Akzeptoren, aber $p \ll N_A$ Löcher in dieser Region



Nochmals zum Verständnis. Weit weg vom Übergang, z. B. auf der n-Halbleitenseite ist $p \ll n = N_D$ und deswegen $S \approx 0$. Im Übergangsbereich ist N_D noch immer dasselbe (und $N_D^+ = N_D$). Allerdings ist $n \ll N_D$ und deswegen

$$S = q \left(\underbrace{p}_{\approx 0} - n + N_D - \underbrace{N_A}_{\approx 0} \right) \approx q N_D$$

Zur Lösung unseres Problems machen wir die Vereinfachungen Näherung: "Die p-n Diode ist in einen neutralen Bereich auf der Seite des Übergangs und einen Verarmungs-zonenbereich des Übergangs eingeteilt, in dem die Beiträge der Raumladung S von den ionisierten Dotierungen herkommen".

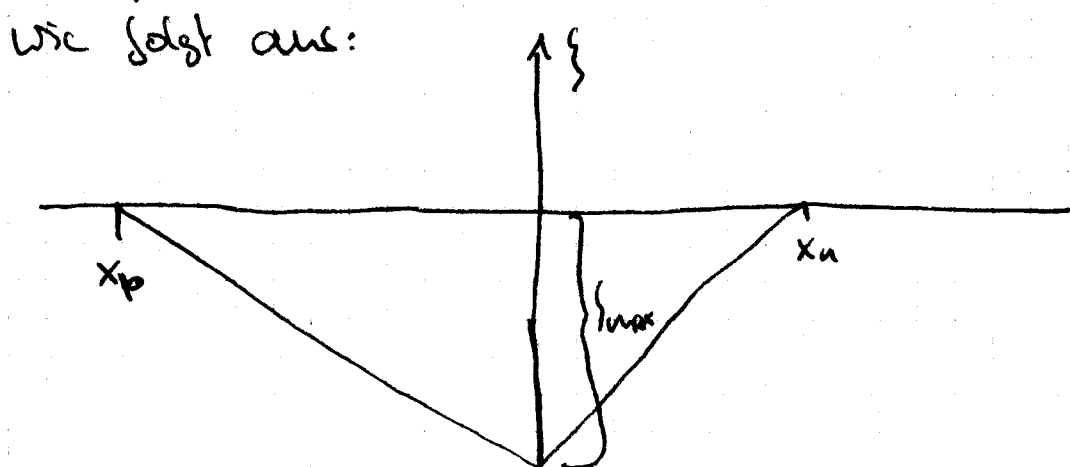
Das macht die Lösung recht einfach:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{q}{\epsilon}$$

Und da wir uns im Bereich von $x_p \dots 0$

sowie $0 \dots x_n$ eine jeweils konstante Ladungsdichte

$S = -q N_A$, bzw. $S = q N_D$ haben, sieht das Feld



Die maximale Feldstärke ergibt sich zu:

$$\zeta_{\max} = \zeta(x=0) = \int_{x_p}^0 \frac{d\zeta}{dx} dx = -\frac{q N_A}{\epsilon} (0 - x_p) = \frac{q N_A}{\epsilon} x_p$$

oder auch

$$-\zeta_{\max} = \int_0^{x_n} \frac{q N_D}{\epsilon} dx = \frac{q N_D}{\epsilon} x_n$$

somit aber auch:

$$N_D x_n = N_A x_p$$

Der Potentialsprung (genauer: die Änderung) ψ ist natürlich

$$\psi = V(\infty) - V(-\infty)$$

$$= V(x_n) - V(x_p) \quad (\text{außerhalb ist } \zeta = 0)$$

$$= \text{Fläche unter } \zeta \text{ Kurve} \quad (\text{da } \frac{dV}{dx} = -\zeta)$$

$$= -\frac{1}{2} (x_n - x_p) \zeta_{\max}$$

$$= -\frac{1}{2} W \zeta_{\max}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\zeta_{\max} = -2\psi/W}}$$

Und die Wellenlänge berechnet man aus

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{2} W \zeta_{\max} = \frac{1}{2} W \frac{q N_D}{\epsilon} x_n = \frac{1}{2} (x_n - x_p) \frac{q N_D}{\epsilon} x_n \\ &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N_D}{N_A} x_n \right) \frac{q N_D}{\epsilon} x_n = \frac{1}{2} x_n^2 \left[1 + \frac{N_D}{N_A} \right] \frac{q N_D}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} x_n^2 \frac{q}{\epsilon} N_D^2 \left[\frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_u = \sqrt{2\psi \frac{\epsilon}{q} \left[\frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right]^{-1}} N_D^{-1}$$

und da $-x_p = \frac{N_D}{N_A} x_u$ ist

$$W = x_u - x_p = x_u + \frac{N_D}{N_A} x_u = x_u \left[\frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right] N_D$$

$$= \sqrt{2\psi \frac{\epsilon}{q} \left[\frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right]}$$

Und die Anteile anbiligen Tiefen der Verarmungszone jeweils

$$x_p = -W \frac{N_D}{N_D + N_A} \quad ; \quad x_e = W \frac{N_A}{N_D + N_A}$$